آمادگی برای امتحان

ریاضی عمومی ۲

ویرایش دوم

شامل خلاصهٔ درس

و

بیست و یک امتحان با پاسخ تشریحی

تألیف: **دکتر مهدی نجفی‌خواه**

عضو هیأت علمی دانشگاه علم و صنعت ایران

زمستان ۱۳۸۲

بسم اللّه الرحمن الرحیم

نجفی‌خواه، مهدی، ۱۳۴۹ —

آمادگی برای امتحان ریاضی عمومی ۲/ تالیف مهدی نجفی خواه. — تهران: ساحل اندیشه تهران، ۱۳۸۲.
۲۴۰ ص. مصور، جدول، نمودار.
ISBN 964-94471-1-3
فهرست نویسی بر اساس اطلاعات فیپا.
ص. ع. به انگلیسی: Calculus II in exams.
چاپ دوم.
۱. ریاضیات —— کتابهای درسی —— راهنمای آموزشی (عالی). ۲. ریاضیات —— آزمونها و تمرینها (عالی).
الف. عنوان. ب. عنوان: ریاضی عمومی ۲.

QA۱۳۹/ن۳۷۱۸ ۵۱۰/۷۶
۱۳۸۲
کتابخانه ملی ایران ۲۸۴۸۵—۸۲م

نام کتاب: آمادگی برای امتحان ریاضی عمومی ۲

نویسنده: دکتر مهدی نجفی‌خواه

ناشر: ساحل اندیشهٔ تهران

نوبت چاپ: دوم، زمستان ۱۳۸۲

تیراژ: ۳۰۰۰ نسخه

تعداد صفحات: ۲۴۰

تعداد امتحانات پاسخ داده شده: ۲۱

تعداد شکلها: ۷۲

تعداد مسایل حل شده: ۱۷۱

مقدمه

آنچه در پیش روی شما قرار دارد، خلاصه‌ای از درس ریاضی عمومی ۲ مطابق با سرفصلهای وزارت علوم، تحقیقات و فن آوری، به همراه مجموعه‌ای مرکب از امتحانات انتخابی استاندارد پایان ترم می‌باشد. هدف از تألیف این کتاب، فراهم نمودن مجموعه‌ای از مسائل حل شده برای دانشجویان درس ریاضی عمومی ۲ می‌باشد.

این کتاب برای سه دسته از دانشجویان می‌تواند مفید باشد، ۱) آنهایی که می‌خواهند با حل مسائل شبیه امتحان پایان ترم، ضمن سنجش اطلاعات خود، شرایط لازم برای قبولی در امتحانات پایان ترم را فراهم نماید. ۲) آن دسته از دانشجویانی که می‌خواهند با حل مسائل بیشتر، موجبات کسب نمرهٔ بالاتردر آزمون پایان ترم را فراهم نمایند. ۳) دانشجویانی که در دانشگاه‌های مختلف درس می‌خوانند و می‌خواهند سطح خود را با دانشجویان سایر دانشگاه‌ها مقایسه کنند.

ریاضی عمومی دو دومین درسی است که دانشجویان فنی و مهندسی در دانشگاه اخذ می‌کنند. می‌توان گفت که این درس تعمیم طبیعی ریاضی عمومی یک به حالت ابعاد بالا است، و هدف از آن گسترش ابزار ریاضی موجود در ریاضی عمومی یک به مسائل عملی‌تر است. این درس از سه بخش کلی تشکیل می‌گردد: ۱) مقدمات، که جبر خطی، هندسه تحلیلی و توابع برداری را شامل می‌گردد. ۲) حد و مشتق توابع چند متغیره و کاربردهای آن. ۳) انتگرال دوگانه، سه‌گانه، خط، سطح و قضایای کلاسیک. چون معمولاً دانشجویان در دبیرستان با جبر خطی و هندسه تحلیلی آشنا می‌شوند، اغلب از بیان مبسوط آنها خودداری می‌شود و به سرعت از آنها گذشته می‌شود.

متأسفانه حجم مطالب این درس بسیار است و زمان در نظر گرفته شده (دو ساعت و ربع و با سه ساعت در هفته) کفاف بیان دقیق همهٔ مطالب را نمی‌دهد. بعلاوه، مطالب درس بسیار به یکدیگر مرتبط هستند و عدم مطالعهٔ مناسب قسمتی از آن،

به معنی از دست دادن همهٔ مطالب بعد از آن موضوع می‌باشد. دیده می‌شود که دانشجویان به دنبال کتابی می‌گردند که دارای مسائل حل شدهٔ بیشتری باشد. آنها علاقمند به داشتن کتابی هستند که به مسائل کلیدی بپردازد و از بحث‌های نظری طولانی خودداری کند. می‌توان گفت که منظور اصلی از تألیف این کتاب، پر کردن این خلأ می‌باشد.

جهت مشاهدهٔ مطالب بیشتر به همراه شرح مبسوط درس و تمرینات و مثالهای متعدد، به کتاب: « **حساب دیفرانسیل، انتگرال و هندسهٔ تحلیلی، جلد دوم. تألیف مهدی نجفی‌خواه. ناشر: بهمن برنا و ساحل اندیشهٔ تهران، ۱۳۸۱** » می‌توانید مراجعه کنید. در این کتاب ضمن آموزش ریاضی عمومی ۲ به شیوهٔ استاندارد و مطابق سیلابس وزارت علوم، چگونگی استفاده از نرم افزار میپل در آن نیز آموزش داده می‌شود.

توصیهٔ مؤلف به خوانندهٔ محترم این است که از این کتاب به عنوان موقعیتی برای شرکت در امتحانات پایان ترم استفاده کند. به این ترتیب که ابتدا مسائل را شخصاً در زمان معادل ۲ ساعت حل کنید و سپس راه حل خود را با پاسخ داده شده مقایسه نموده و اشتباهات احتمالی خود را دریابید. سپس به کتاب درسی خود و یا به قسمت خلاصهٔ درس (در ابتدای این کتاب) مراجعه نموده و به رفع مشکلاتی احتمالی بپردازید.

به جا است که مراتب امتنان خود را از آقایان علی رجبی و کاظم نوری و نیز خانم هانیه کارخانه که با دقت وصف ناپذیر به بازخوانی این اثر پرداختند، اعلام نمایم. از مسئولین محترم انتشارات ساحل اندیشهٔ تهران نیز که شرایط لازم برای نشر این اثر را فراهم نموده‌اند قدردانی می‌نمایم. در پایان از دانشجویان محترم و نیز همکاران ارجمند تقاضا می‌شود که هر گونه نظر و پیشنهاد در مورد مطالب این کتاب را کتباً با این جانب (به آدرس: تهران، نارمک، دانشگاه علم و صنعت ایران، دانشکدهٔ ریاضی و یا e-mail: m_nadjafikhahiust.ac.ir) در میان بگذارند.

مهدی نجفی‌خواه
۱۱ دی ۱۳۸۲

فهرست مندرجات

فصل ۱

خلاصه درس

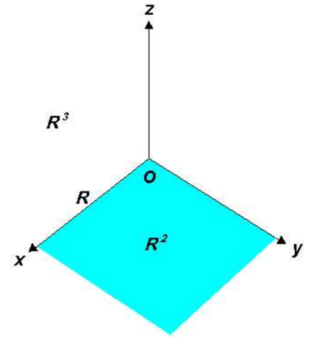
۱.۱ جبر خطی

جبر خطی مجموعه‌ای از اطلاعات در مورد بردارها و ماتریسها می‌باشد. از این شاخه از ریاضیات استفادهٔ بسیاری در رشته‌های فنی و مهندسی می‌شود. این بخش و بخش بعدی (یعنی، هندسه تحلیلی) مقدمه‌ای برای فهم سایر بخشها می‌باشند. عمده‌ترین اهداف این بخش عبارتند از: آشنایی با بردار، دترمینان و روش حل دستگاه‌های معادلات خطی.

۱.۱.۱ فضای $\mathbb{R}^n$. فرض کنیم n عددی طبیعی باشد. **فضای اقلیدسی n بعدی** را به صورت مجموعهٔ همهٔ n−تایی‌های مرتب $(x_۱, x_۲, \cdots, x_n)$ از اعداد حقیقی تعریف کرده و با نماد $\mathbb{R}^n$ نشان می‌دهیم. اعضای $\mathbb{R}^n$ را **نقطه** می‌نامیم. $\mathbb{R}^۱$ را با نماد $\mathbb{R}$ نشان داده و **خط حقیقی** نامیده، $\mathbb{R}^۲$ را **صفحه** (حقیقی) گفته و $\mathbb{R}^۳$ را **فضا** می‌نامیم (به شکل ۱.۱ توجه شود).

۲.۱.۱ قرارداد. از این پس به جهت ایجاد سادگی در بحث، تنها بر فضای $\mathbb{R}^۳$ بحث می‌کنیم. روشن است که بحث مشابهی برای $\mathbb{R}^n$ با n دلخواه برقرار است.

۳.۱.۱ بردار. بردار بر دو قسم مقید و آزاد می‌باشد. منظور از **بردار مقید** در $\mathbb{R}^۳$ زوج مرتبی است به شکل (P, Q) از نقاط در $\mathbb{R}^۳$ که آن را با نماد $\overrightarrow{PQ}$ نشان می‌دهیم.



شکل ۱.۱: خط، صفحه و فضا

P را ابتدا و Q را انتهای بردار $\overrightarrow{PQ}$ می‌نامیم.

بردار آزاد. بردارهای مقید $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{RS}$ از $\mathbb{R}^۳$ را در صورتی **همسنگ** گوئیم که یکی (و در نتیجه همه) موارد زیر صحیح باشد:

۱) چهار ضلعی $PQSR$ متواضی الاضلاع باشد.

۲) بردارها مقید $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{RS}$ موازی، همجهت و همطول باشند.

۳) روابط زیر برقرار باشند:

$$x_Q - x_P = x_S - x_R \quad , \quad y_Q - y_P = y_S - y_R \quad , \quad z_Q - z_P = z_S - z_R$$

رابطهٔ همسنگی یک رابطهٔ هم ارزی بر مجموعهٔ همهٔ بردارهای مقید در فضای $\mathbb{R}^۳$ است. به هر یک از دسته‌های همسنگی از این مجموعه، یک **بردار آزاد** در $\mathbb{R}^۳$ گفته و مجموعهٔ همهٔ بردارهای آزاد در $\mathbb{R}^۳$ را با همان نماد $\mathbb{R}^۳$ نشان می‌دهیم. به هر یک از اعضای یک بردار آزاد، یک **نماینده** می‌گوئیم. هر بردار آزاد دارای یک نمایندهٔ به شکل $\overrightarrow{OV}$ می‌باشد که آنرا با نماد $\overrightarrow{V}$ یا $\mathbf{V}$ نشان می‌دهیم.

اعمال در بردارها. فرض کنیم $\overrightarrow{(a,b,c)}, \overrightarrow{(a',b',c')} \in \mathbb{R}^۳$ و $\alpha \in \mathbb{R}$، در این صورت تعریف می‌کنیم:

$$\overrightarrow{(a,b,c)} + \overrightarrow{(a',b'c')} = \overrightarrow{(a+a',b+b',c+c')} \qquad \alpha\overrightarrow{(a,b,c)} = \overrightarrow{(\alpha a, \alpha b, \alpha c)}$$

فرض کنیم $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in \mathbb{R}^۳$ و $a,b, \in \mathbb{R}$ در این صورت داریم:

۱) $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in \mathbb{R}^۳$ ۲) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$

۳) $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$ ۴) $\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$

۵) $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=(-\mathbf{u})+\mathbf{u}$ ۶) $a\mathbf{u}\in\mathbb{R}^۳$

۷) $a(b\mathbf{u})=(ab)\mathbf{u}$ ۸) $a(\mathbf{u}+\mathbf{v})=a\mathbf{u}+a\mathbf{v}$

۹) $۱\mathbf{u}=\mathbf{u}$

که در آن $\mathbf{0}=\overrightarrow{(۰,۰,۰)}$ و $-\overrightarrow{(a,b,c)}=\overrightarrow{(-a,-b,-c)}$.

۴.۱.۱ استقلال و وابستگی. فرض کنیم $\mathbf{u}_۱,\mathbf{u}_۲,\cdots\mathbf{u}_m\in\mathbb{R}^n$ بردار باشند. منظور از یک ترکیب خطی از این بردارها، عبارتی است به شکل

$$a_۱\mathbf{u}_۱+a_۲\mathbf{u}_۲+\cdots+a_m\mathbf{u}_m$$

که $a_۱,a_۲,\cdots a_m\in\mathbb{R}$. در صورتی می‌گوئیم این بردارها نسبت به هم مستقل خطی هستند که از هر ترکیب خطی $a_۱\mathbf{u}_۱+a_۲\mathbf{u}_۲+\cdots+a_m\mathbf{u}_m=\mathbf{0}$ نتیجه گردد $a_i=۰$. در غیر این صورت می‌گوئیم آنها نسبت به هم وابستهٔ خطی هستند.

۵.۱.۱ پایه و بعد. m بردار $\mathbf{u}_۱,\mathbf{u}_۲,\cdots,\mathbf{u}_m\in\mathbb{R}^n$ را در صورتی پایه گوئیم که اولاً هر بردار از $\mathbb{R}^n$ را به شکل ترکیبی خطی از این بردارها بتوان نوشت، و ثانیاً این بردارها مستقل خطی باشند. اگر $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n$ و $a_۱,a_۲,\cdots a_n\in\mathbb{R}$ اعداد منحصر بفردی باشند که به ازای آنها $\mathbf{u}=a_۱\mathbf{u}_۱+a_۲\mathbf{u}_۲+\cdots+a_n\mathbf{u}_n=\mathbf{0}$، آنگاه $\overrightarrow{(a_۱,a_۲,\cdots,a_n)}$ را **مختصات** $\mathbf{u}$ نسبت به این پایه می‌نامیم.

۶.۱.۱ ماتریس. فرض کنیم m و n دو عدد طبیعی باشند. منظور از یک ماتریس $m\times n$ از اعداد حقیقی، یک آرایه مرتب (= جدول = بلوک) به ابعاد n سطر و m ستون است. معمولاً اعضای یک ماتریس را درآیه می‌نامند. عضو واقع در سطر i ام و ستون j ام را درآیه (i,j) می‌نامیم. مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای $m\times n$ را با نماد $\mathrm{Mat}(n\times m)$ نشان می‌دهیم.

اعمال بر ماتریسها. اگر $[a_{ij}],[b_{ij}]\in\mathrm{Mat}(n\times m)$ و $c\in\mathbb{R}$، تعریف می‌کنیم:

$$[a_{ij}]+[b_{ij}]=[a_{ij}+b_{ij}] \quad , \quad c[a_{ij}]=[ca_{ij}]$$

اگر $[a_{ij}]\in\mathrm{Mat}(n\times m)$ و $[b_{ij}]\in\mathrm{Mat}(m\times p)$، تعریف می‌کنیم:

$$[a_{ij}][b_{ij}]=[c_{ij}] \quad , \quad c_{ij}=\sum_{k=۱}^{m}a_{ik}b_{kj}$$

روشن است که باید تعداد ستون‌های ماتریس اول با تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر باشد و در این صورت $[c_{ij}] \in \mathrm{Mat}(n \times p)$.

ماتریس را در صورتی مربعی نامیم که تعداد سطرها و ستون‌هایش برابر باشد.

ماتریس مربعی $n \times n$ که عناصر روی قطر اصلی‌اش (یعنی عناصر به شکل (i,i) از آن) همگی برابر یک هستند و سایر عناصر آن برابر صفرند، ماتریس همانی نامیده و با نماد I_n نشان می‌دهیم.

۷.۱.۱ دترمینان. دترمینان تنها برای ماتریس‌های مربعی تعریف می‌گردد. تعریف دترمینان به شکل استقرایی و از ساده به مشکل است:

$$\det \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{bmatrix} = a_{۱۱}a_{۲۲} - a_{۱۲}a_{۲۱}$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix} = a_{۱۱} \det \begin{bmatrix} a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix} - a_{۱۲} det \begin{bmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$$

$$+a_{۱۳} \det \begin{bmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۲} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} \end{bmatrix} = a_{۱۱}a_{۲۲}a_{۳۳} - a_{۱۱}a_{۲۳}a_{۳۲}$$

$$-a_{۱۲}a_{۲۱}a_{۳۳} + a_{۱۲}a_{۲۳}a_{۳۱} + a_{۱۳}a_{۲۱}a_{۳۲} - a_{۱۳}a_{۲۲}a_{۳۱}$$

$$\vdots$$

اغلب بجای $\det A$ از نماد $|A|$ استفاده می‌شود.

دترمینان دارای خواصی به شرح زیر است:

قضیه. اگر A و $\mathbf{B}$ دو ماتریس $n \times n$ بوده و a عددی حقیقی باشد، آنگاه

۱) دترمینان AB برابر با حاصلضرب دترمینان A در دترمینان $\mathbf{B}$ است.

۲) ماتریس A در صورتی معکوس‌پذیر است که دترمینان آن مخالف صفر باشد. دترمینان $A^{-۱}$ برابر است با $۱/\det A$.

۳) اگر عناصر موجود در یک سطر از ماتریس A را نظیر به نظیر با عناصر موجود در سطر دیگری از A تعویض کنیم، دترمینان در ۱− ضرب می‌شود.

۴) اگر عناصر موجود در یک سطر از ماتریس A را نظیر به نظیر با a برابر عناصر موجود در سطر دیگری از A جمع کنیم، دترمینان تغییر نمی‌کند.

۵) اگر عناصر موجود در یک سطر از ماتریس A را در عددی ضرب کنیم، دترمینان در آن عدد ضرب می‌شود.

۶) خواص ۳، ۴ و ۵ در مورد ستون‌ها نیز صحیح می‌باشند.

قضیه. فرض کنید $A = [a_{ij}]$ یک ماتریس $n \times n$ با دترمینان مخالف صفر است. در این صورت $A^{-1} = (1/\det A)\tilde{A}^t$ که $\tilde{A}^t$ نمایش دهندهٔ ترانهاد $\tilde{A}$ که $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]$ الحاقی ماتریس A است و $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{(i+j)} \det[a_{\alpha\beta}]_{\alpha\neq i,\beta\neq j}$.

۸.۱.۱ دستگاه معادلات خطی.

منظور از یک **معادلهٔ خطی** با m متغیر، معادله‌ای است به شکل $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_mx_m = b$ که b، a_1، a_2، . . . و a_m اعداد معلوم هستند و x_1، x_2، . . . و x_m مجهولات مسأله هستند. منظور از یک **دستگاه n معادلهٔ m مجهولی خطی**، مجموعه‌ای است به شکل زیر از معادلات خطی

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{array}\right. \tag{1.1}$$

$m-$ تایی مرتب $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_m)$ را در صورتی **یک جواب خصوصی** دستگاه (۱.۱) گوئیم که در کلیه معادلات داده شده صدق کند. مجموعهٔ همه جوابهای خصوصی دستگاه را **جواب عمومی** می‌نامیم. $[a_{ij}] \in \mathrm{Mat}(n \times m)$ را **ماتریس ضرایب**، $[b_i] \in \mathrm{Mat}(n \times 1)$ را **ستون ثابتها** و $[x_i] \in \mathrm{Mat}(m \times 1)$ را **ستون مجهولات** می‌نامیم.

۹.۱.۱ روش حذف گاوس.

در این روش، ابتدا یک مجهول را در میان معادلات داده شده حذف می‌کنند. حاصل دستگاهی با یک مجهول کمتر و نیز با لااقل یک معادله کمتر خواهد بود. با ادامه این روش، دستگاهی با فقط یک معادلهٔ یک مجهولی به‌دست می آید، که پس از حل آن و بازگشت به عقب، دستگاه نخست قابل حل خواهد شد.

۱۰.۱.۱ روش کرامر.

دستگاه (۱.۱) که در آن $n = m$ در صورتی دارای جواب منحصر به فرد است که دترمینان ماتریس ضرایب آن مخالف صفر باشد. فرض کنیم چنین باشد، به علاوه، فرض کنیم A_i ماتریسی $n \times n$ باشد که عناصر ستون i ام آن درآیه‌های ستون ثابت‌ها هستند، و سایر درآیه‌های آن، درآیه‌های ماتریس ضرایب A می‌باشند. در این صورت $x_i = \det A_i / \det A$.

۱۱.۱.۱ دستگاه همگن. دستگاهی را همگن نامیم که همه عناصر موجود در ستون ثابت‌هایش صفر باشد. جواب صفر (یعنی، $x_۱ = x_۲ = \cdots = ۰$) همیشه یک جواب برای دستگاه همگن است. اگر تعداد معادلات و مجهولات یک دستگاه همگن مفروض برابر باشند، آن دستگاه در صورتی جواب غیر صفر دارد که دترمینان ضرایب آن برابر صفر باشد.

۱۲.۱.۱ بردار و مقدار ویژه. فرض کنیم A یک ماتریس $n\times n$ از اعداد باشد. اگر بردار $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ و عدد $\lambda\in C$ در رابطهٔ $A\mathbf{v}=\lambda\mathbf{v}$ صدق کنند، بردار $\mathbf{v}$ را **بردار ویژه** و عدد λ را **مقدار ویژه** ماتریس A می‌نامیم.

قضیهٔ هامیلتن شرط لازم و کافی برای اینکه $\lambda\in\mathbb{R}$ مقدار ویژهٔ ماتریس A باشد این است که در معادلهٔ زیر صدق کند:

$$\det(\lambda I_n - A) = ۰ \qquad \text{(معادلهٔ مشخصهٔ ماتریس } A\text{)}$$

توضیح اینکه ممکن است مقدار ویژه یک ماتریس مفروض، عددی مختلط باشند.

۲.۱ هندسه تحلیلی

بنابه تعریف هندسهٔ تحلیلی، آن قسمت از علم هندسه است که در مطالعات خود از جبر خطی استفاده می‌کند. بر خلاف هندسهٔ مقدماتی که در آن صرفاً از منطق برای اثبات استفاده می‌شود، در هندسه تحلیلی از عدد و معادله استفادهٔ فراوانی به عمل می‌آید. مفاهیم ضرب داخلی، ضرب خارجی، خط، صفحه، منحنی درجهٔ دوم و رویهٔ درجهٔ دوم دارای اهمیت خاصی در ادامهٔ بحث می‌باشند.

۱.۲.۱ ضرب داخلی. فرض کنیم $\mathbf{u}=\overrightarrow{(a,b,c)}, \mathbf{v}=\overrightarrow{(d,e,f)}\in\mathbb{R}^۳$، حاصل ضرب داخلی این دو بردار به صورت $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}=ad+be+cf$ تعریف می‌شود.

به ازای بردارهای $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^۳$ و اعداد $a,b\in\mathbb{R}$، داریم

۱) $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}\in\mathbb{R}$, ۲) $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}=\mathbf{v}\bullet\mathbf{u}$,

۳) $۰\le\mathbf{u}\bullet\mathbf{u}$, ۴) $\mathbf{u}\bullet\mathbf{u}=۰\Leftrightarrow\mathbf{u}=\mathbf{o}$,

۵) $\mathbf{u}\bullet(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}+\mathbf{u}\bullet\mathbf{w}$

اندازهٔ یک بردار. اگر $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$، طول (= نرم) بردار $\mathbf{u}$ را به صورت $\sqrt{\mathbf{u} \bullet \mathbf{u}}$ تعریف کرده و بشکل $\|\mathbf{u}\|$ نشان می‌دهیم. در این صورت، به ازای $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ و $a, b \in \mathbb{R}$ داریم

۱) $\|\mathbf{u}\| \in [0; +\infty]$ ۲) $\|\mathbf{u}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{o}$

۳) $|\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|$ ۴) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$

(۳) و (۴) را بترتیب نامساوی کوشی و نامساوی مثلثی می‌نامند.

زاویهٔ بین دو بردار. زاویه بین بردارهای $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ را به صورت $\cos^{-1}\left(\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} \,/\, \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|\right)$ تعریف می‌کنیم. در نتیجه

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \;\; \|\mathbf{v}\| \cos(\text{زاویه‌بین } \mathbf{u} \text{ و } \mathbf{v})$$

اگر $\mathbf{u}$ برداری مخالف صفر باشد، بردار یکهٔ آنرا به صورت $\mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|$ تعریف می‌کنیم. روشن است که طول این بردار برابر یک می‌باشد.

شرط لازم و کافی برای اینکه دو بردار متعامد باشند این است که حاصل ضرب داخلی آن دو برابر صفر باشد. به بیان دیگر، مجموع حاصا ضرب مختصات نظیر آن دو، صفر باشد.

تصویر یک بردار بر برداری دیگر. اگر $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ بردار باشند، تصویر $\mathbf{u}$ بر $\mathbf{v}$ را به صورت $\left(\frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\right) \mathbf{v}$ تعریف کرده و به شکل $\mathrm{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u}$ نشان می‌دهیم. بنابراین

$$|\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}| = \|\mathbf{v}\| \, \|\mathrm{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u}\|$$

۲.۲.۱ ضرب خارجی و ضرب مختلط.

حاصل ضرب خارجی بردار مفروض $\mathbf{u} = \overrightarrow{(a, b, c)}$ در بردار $\mathbf{v} = \overrightarrow{(e, f, g)}$ را به صورت:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a & b & c \\ e & f & g \end{vmatrix} = (bg - cf)\mathbf{i} - (ag - ce)\mathbf{j} + (af - be)\mathbf{k}$$

تعریف کرده و با نماد $\mathbf{u} \times v$ نشان می‌دهیم. در مورد ضرب خارجی داریم:

۱) $\mathbf{u} \;\; \times \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ۲) $\mathbf{u} \perp \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \perp \mathbf{u} \times \mathbf{v},$

۳) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u},$ ۴) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w},$

۵) $\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \bullet \mathbf{w}$, ٦) $a(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (a\mathbf{u}) \times \mathbf{v}$,

۷) $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \ \ \|\mathbf{v}\| \sin($زاویه بین u و $\mathbf{v})$

به علاوه کنج $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ راستگرد است، به این معنی که اگر با دست راست $\mathbf{u}$ را به سمت $\mathbf{v}$ دوران دهیم، شست دست راست در امتداد $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ قرار خواهد گرفت.

شرط لازم و کافی برای اینکه دو بردار متوازی باشند این است که حاصل ضرب خارجی آن برابر صفر باشد. به بیان دیگر، نسبت مختصات نظیر آن دو برابر باشند.

حاصل ضرب مختلط سه بردار $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ را با نماد $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = \mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \det \begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{bmatrix}$$

این ضرب تمام خواص دترمینان را به ارث می‌برد. بر همین اساس، مهمترین خواص این ضرب عبارتند از:

۱) $[a\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = a[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$,

۲) $[\mathbf{u}_۱ + \mathbf{u}_۲, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = [\mathbf{u}_۱, \mathbf{v}, \mathbf{w}] + [\mathbf{u}_۲, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$,

۳) $[\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}] = -[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$, ۴) $[\mathbf{u}, \mathbf{v} + a\mathbf{u}, \mathbf{w}] = [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$

۵) $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$ وقتی و تنها وقتی صفر است که بردارهای $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ وابسته خطی باشند.

٦) قدر مطلق $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$ با حجم متوازی السطوح ساخته شده توسط سه بردار $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ برابر است.

۳.۲.۱ خط در صفحه.

فرض کنیم $X_\circ, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^۲$ و $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$. خط گذشته از نقطهٔ $X_\circ$ با بردار هادی (جهت) $\mathbf{v}$ مجموعهٔ همه نقاطی $X \in \mathbb{R}^۲$ است به گونه‌ای که $(X - X_\circ) \| \mathbf{v}$. به بیان دیگر، اگر $X_\circ = (x_\circ, y_\circ)$، $\mathbf{v} = \overrightarrow{(a, b)}$ و $X = (x, y)$، آنگاه:

$$\frac{x - x_\circ}{a} = \frac{y - y_\circ}{b} \qquad \text{(معادلهٔ کانونی)}$$

و یا اگر مقدار مشترک این کسر را t بگیریم، داریم

$$x = x_\circ + ta, \quad y = y_\circ + tb \qquad \text{(معادلات پارامتری)}$$

خطی که محور y ها را در b قطع کرده و زاویه α را با محور x ها می‌سازد، دارای معادلهٔ کانونی $y = mx + b$ است، که در اینجا $m = \tan\alpha$ ضریب و یا شیب خط نامیده می‌شود.

خطی که محور x ها را در a و محور y ها را در b قطع می‌کند دارای معادلهٔ کانونی $x/a + y/b = ۱$ است.

خطی که از دو نقطه متمایز $(x_۱, y_۱)$ و $(x_۲, y_۲)$ می‌گذرد به معادلهٔ کانونی زیر است

$$\frac{x - x_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{y - y_۱}{y_۲ - y_۱}$$

فاصله نقطه $(x_۱, y_۱)$ تا خط گذشته از نقطهٔ $(x_\circ, y_\circ)$ با بردار قائم (a, b) برابر است با

$$\frac{|a(x_۱ - x_\circ) + b(y_۱ - y_\circ)|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

و با بردار هادی (a, b) برابر است با

$$\frac{|a(y_۱ - y_\circ) - b(x_۱ - x_\circ)|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

زاویه میان دو خط برابر با زاویه میان بردارهای هادی آن دو خط است.

۴.۲.۱ صفحه در فضا. صفحهٔ گذشته از نقطهٔ $X_\circ \in \mathbb{R}^۳$ با بردار قائم (نرمال) $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^۳$ مجموعهٔ همه نقاطی $X \in \mathbb{R}^۳$ است که

$$(X - X_\circ) \bullet \mathbf{n} = \circ \qquad \text{(معادله برداری)}$$

اگر $X_\circ = (x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ ، $\mathbf{n} = (a, b, c)$ و $X = (x, y, z)$، آنگاه داریم:

$$a(x - x_\circ) + b(y - y_\circ) + c(z - z_\circ) = \circ \qquad \text{(معادله کانونی)}$$

صفحه‌ای که محور x ها را در a، محور y ها را در b و محور z ها را در c قطع می‌کند دارای معادلهٔ کانونی $x/a + y/b + z/c = ۱$ است.

صفحه‌ای که از سه نقطهٔ غیرواقع در یک راستا $(x_۱, y_۱, z_۱)$، $(x_۲, y_۲, z_۲)$ و $(x_۳, y_۳, z_۳)$ می‌گذرد دارای معادلهٔ کانونی زیر است:

$$\det \begin{bmatrix} x - x_۱ & x_۲ - x_۱ & x_۳ - x_۱ \\ y - y_۱ & y_۲ - y_۱ & y_۳ - y_۱ \\ z - z_۱ & z_۲ - z_۱ & z_۳ - z_۱ \end{bmatrix} = \circ$$

صفحه‌ای که از نقطهٔ (x_0, y_0, z_0) گذشته و موازی بردارهای (غیر متوازی) $\overrightarrow{(a_1, b_1, c_1)}$ و $\overrightarrow{(a_2, b_2, c_2)}$ است، دارای معادلهٔ کانونی زیر است:

$$\det \begin{bmatrix} x - x_0 & y - y_1 & z - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} = 0$$

فاصله نقطهٔ (x_1, y_1, z_1) تا صفحه گذشته از نقطهٔ (x_0, y_0, z_0) با بردار قائم (نرمال) $\overrightarrow{(a, b, c)}$ برابر است با

$$\frac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_o)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

زاویه میان دو صفحه برابر زاویهٔ میان بردارهای قائم بر آن دو صفحه است.

۵.۲.۱ خط در فضا. فرض کنیم $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ و $X_0 \in \mathbb{R}^3$. خط گذشته از نقطهٔ X_0 با بردار هادی (جهت) $\mathbf{v}$ مجموعهٔ همه نقاطی $X \in \mathbb{R}^3$ است که $(X - X_0)||\mathbf{v}$. به بیان دیگر، اگر $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$، $\mathbf{v} = \overrightarrow{(a, b, c)}$ و $X = (x, y, z)$، آنگاه داریم:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \qquad \text{(معادله کانونی)}$$

و یا اگر مقدار مشترک این کسر را t بگیریم، داریم

$$x = x_0 + ta, \quad y = y_0 + tb, \quad z = z_0 + tc \qquad \text{(معادلات پارامتری)}$$

خطی که از دو نقطهٔ متمایز (x_1, y_1, z_1) و (x_2, y_2, z_2) می‌گذرد به معادلهٔ کانونی $(x - x_1)/(x_2 - x_1) = (y - y_1)/(y_2 - y_1) = (z - z_1)/(z_2 - z_1)$ است. فاصله نقطهٔ X_0 تا خط گذشته از نقطهٔ X_1 با بردار هادی $\mathbf{v}$ برابر است با

$$\frac{||(X_0 - X_1) \times \mathbf{v}||}{||\mathbf{v}||}$$

فاصله خط گذشته از نقطهٔ X_1 با بردار هادی $\mathbf{v}_1$ و خط گذشته از نقطهٔ X_2 با بردار هادی $\mathbf{v}_2$ برابر است با

$$\frac{|(X_1 - X_2) \bullet (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)|}{||\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2||}$$

زاویه میان دو خط برابر زاویه میان بردارهای هادی آن دو خط است.

زاویه میان یک خط و یک صفحه برابر متمم زاویه میان بردار هادی خط و بردار قائم بر صفحه است.

۶.۲.۱ منحنی‌های درجه دوم یا مقاطع مخروطی. منحنی به معادلهٔ

$$ax^{۲} + by^{۲} + dx + ey + f = ۰ \qquad (۲.۱)$$

را منحنی درجه دوم و یا مقطع مخروطی می‌نامیم. در ادامه فرض ما بر این است که $F = ax^{۲} + by^{۲} + dx + ey + f$ و دستگاهی به شرح زیر را در نظر می‌گیریم:

$$۲ax + d = ۰, ۲by + e = ۰ \qquad (۳.۱)$$

بیضی. اگر اعداد a و b در معادلهٔ (۲.۱) هم علامت باشند، $x_{۰}$ و $y_{۰}$ جوابهایی از دستگاه (۳.۱) باشند و $F(x_{۰}, y_{۰})$ با a مختلف العلامه باشد، آنگاه معادلهٔ (۲.۱) را بصورت

$$\frac{(x - x_{۰})^{۲}}{\alpha^{۲}} + \frac{(y - y_{۰})^{۲}}{\beta^{۲}} = ۱$$

می‌توان نوشت. در این حالت منحنی را **بیضی به مرکز** $(x_{۰}, y_{۰})$ **و نیم قطرهای** α و β می‌نامیم (به شکل ۲.۱—(الف) توجه شود)، که در آن

$$\alpha = \sqrt{\frac{-F(x_{۰}, y_{۰})}{a}}, \qquad \beta = \sqrt{\frac{-F(x_{۰}, y_{۰})}{b}}$$

دایره. اگر در یک بیضی $a = b$ آنگاه $\alpha = \beta$ و می‌توان نوشت

$$(x - x_{۰})^{۲} + (y - y_{۰})^{۲} = R^{۲}$$

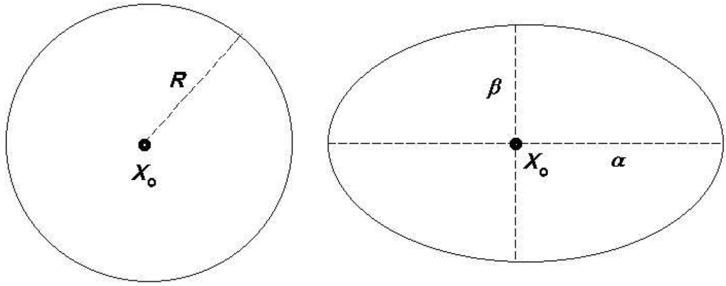
در این حالت، منحنی را **دایره به مرکز** $(x_{۰}, y_{۰})$ **و شعاع** $R = \alpha$ می‌نامیم (به شکل ۲.۱—(ب) توجه شود).

هذلولی. اگر در معادلهٔ (۲.۱) عدد a مثبت و عدد b منفی باشد، $x_{۰}$ و $y_{۰}$ جوابهایی از دستگاه (۳.۱) باشند و $F(x_{۰}, y_{۰})$ نیز منفی باشد، آنگاه معادلهٔ (۲.۱) را به صورت

$$\frac{(x - x_{۰})^{۲}}{\alpha^{۲}} - \frac{(y - y_{۰})^{۲}}{\beta^{۲}} = ۱$$

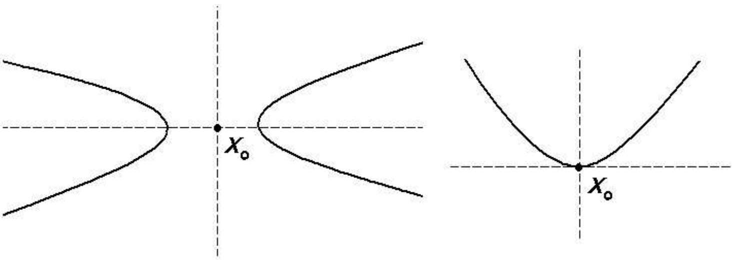
می‌توان نوشت. منحنی را در این حالت **هذلولی به مرکز** $(x_{۰}, y_{۰})$ **و نیم قطرهای** α و β می‌نامیم (شکل ۳.۱—(الف) توجه شود)، که در آن

$$\alpha = \sqrt{\frac{-F(x_{۰}, y_{۰})}{a}}, \qquad \beta = \sqrt{\frac{F(x_{۰}, y_{۰})}{b}}$$



(ب) (الف)

شکل ۲.۱: (الف) بیضی (ب) دایره



(ب) (الف)

شکل ۳.۱: (الف) هذلولی (ب) سهمی

سهمی. اگر در معادلهٔ (۲.۱) عدد b صفر بوده و a مخالف صفر باشد و $x_\circ$ جوابی از معادلهٔ اول در دستگاه (۳.۱) باشد، آنگاه معادلهٔ (۲.۱) را به صورت

$$y - y_\circ = a(x - x_\circ)^۲$$

می‌توان نوشت. در این حالت، منحنی را **سهمی با رأس در** $(x_\circ, y_\circ)$ **و محور تقارن** x–محور می‌نامیم (به شکل ۳.۱–(ب) توجه شود).

قضیه فرض کنیم $\Delta = ab$، در این صورت

(۱) اگر $\Delta < \circ$ آنگاه منحنی (۲.۱) هذلولی و یا دو خط متقاطع است.

(۲) اگر $\Delta = \circ$ آنگاه منحنی (۲.۱) سهمی و یا یک خط راست است.

(۳) اگر $\Delta < 0$ آنگاه منحنی (۲.۱) بیضی، دایره و یا یک نقطه است.

۷.۲.۱ رویه‌های درجه دوم.

رویه (= سطح) به معادلهٔ

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dx + ey + fz + g = 0 \qquad (۴.۱)$$

را رویهٔ درجه دوم می‌نامیم. در ادامه فرض ما بر این است که

$$F = ax^2 + by^2 + cz^2 + dx + ey + fz + g,$$

و دستگاهی به شرح زیر را در نظر می‌گیریم:

$$2ax + d = 0, \quad 2by + e = 0, \quad 2cz + f = 0 \qquad (۵.۱)$$

بیضی گون. اگر اعداد a ، b و c در معادلهٔ (۴.۱) هم علامت باشند، x_0، y_0 و z_0 جوابی از دستگاه (۵.۱) باشند و $F(x_0, y_0, z_0)$ و a مختلف العلامه باشند، آنگاه معادلهٔ (۴.۱) را به صورت

$$\frac{(x - x_0)^2}{\alpha^2} + \frac{(y - y_0)^2}{\beta^2} + \frac{(z - z_0)^2}{\gamma^2} = 1$$

می‌توان نوشت. در این حالت، رویه را **بیضی گون به مرکز** (x_0, y_0, z_0) **و نیم قطرهای** α، β و γ می‌نامیم (به شکل ۴.۱—(الف) توجه شود)، که در آن

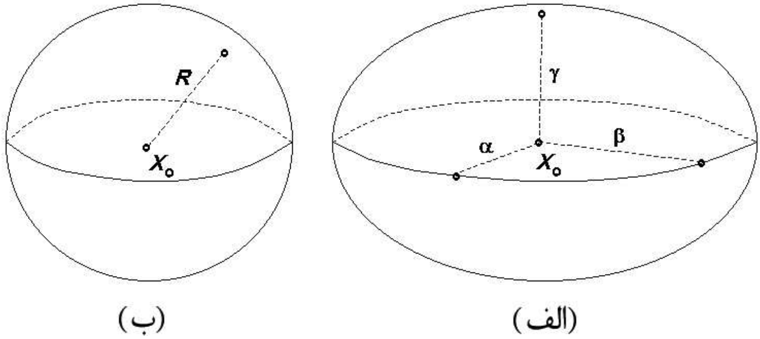
$$\alpha = \sqrt{\frac{-F(x_0, y_0, z_0)}{a}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{-F(x_0, y_0, z_0)}{b}}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{-F(x_0, y_0, z_0)}{c}}$$

کره. اگر در یک بیضی‌گون $a = b = c$ آنگاه $\alpha = \beta = \gamma$ و می‌توان نوشت

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

در این حالت، رویه را **کرهٔ به مرکز** (x_0, y_0, z_0) **و شعاع** $R = a$ می‌نامیم (به شکل ۴.۱—(ب) توجه شود).

هذلولی کون یکپارچه اگر در معادلهٔ (۴.۱) اعداد a و b مثبت و عدد c منفی باشد، x_0، y_0 و z_0 جوابی از دستگاه (۵.۱) باشند و $F(x_0, y_0, z_0)$ منفی باشد، آنگاه معادلهٔ



شکل ۴.۱: (الف) بیضیگون (ب) کره

(۴.۱) را به صورت

$$\frac{(x-x_0)^2}{\alpha^2}+\frac{(y-y_0)^2}{\beta^2}-\frac{(z-z_0)^2}{\gamma^2}=1$$

می‌توان نوشت. در این حالت، رویه را **هذلولی گون یکپارچه به مرکز** (x_0,y_0,z_0) **و نیم قطرهای** α، β و γ می نامیم، (به شکل ۵.۱—(الف) توجه شود) که در آن

$$\alpha=\sqrt{\frac{-F(x_0,y_0,z_0)}{a}}\,,\quad \beta=\sqrt{\frac{-F(x_0,y_0,z_0)}{b}}\,,\quad \gamma=\sqrt{\frac{F(x_0,y_0,z_0)}{c}}$$

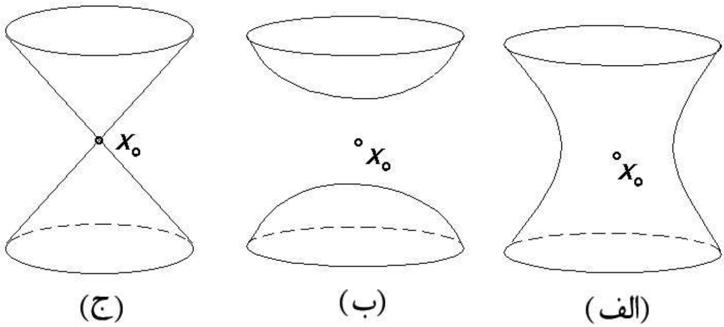
هذلولی گون دو پارچه. اگر در معادلهٔ (۴.۱) اعداد a و b مثبت و عدد c منفی باشد، x_0، y_0 و z_0 جوابی از دستگاه (۵.۱) باشند و $F(x_0,y_0,z_0)$ مثبت باشد، آنگاه معادلهٔ (۴.۱) را به صورت

$$-\frac{(x-x_0)^2}{\alpha^2}-\frac{(y-y_0)^2}{\beta^2}+\frac{(z-z_0)^2}{\gamma^2}=1$$

می‌توان نوشت. در این حالت، رویه را **هذلولی‌گون دو پارچه به مرکز** (x_0,y_0,z_0) **و نیم قطرهای**α، β و γ می‌نامیم (به شکل ۵.۱—(ب) توجه شود)، که در آن

$$\alpha=\sqrt{\frac{F(x_0,y_0,z_0)}{a}}\,,\quad \sqrt{\frac{F(x_0,y_0,z_0)}{b}}\,,\quad \sqrt{\frac{-F(x_0,y_0,z_0)}{c}}$$

مخروط. اگر در معادلهٔ (۴.۱) اعداد a و b مثبت و عدد c منفی باشد، x_0، y_0 و z_0 جوابی از دستگاه (۵.۱) باشند و $F(x_0,y_0,z_0)$ صفر باشد، آنگاه معادلهٔ (۴.۱) را به



شکل ۵.۱: (الف) هذلولیگون یکپارچه (ب) هذلولیگون دو پارچه (ج) مخروط

صورت

$$\frac{(x-x_\circ)^۲}{\alpha^۲}+\frac{(y-y_\circ)^۲}{\beta^۲}=\frac{(z-z_\circ)^۲}{\gamma^۲}$$

می‌توان نوشت. رویه را در این حالت **مخروط به مرکز** $(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ **و نیم قطرهای** α، β و γ می‌نامیم (به شکل ۵.۱—(ج) توجه شود)، که در آن

$$\alpha=\sqrt{\frac{۱}{a}}\ ,\ \ \beta=\sqrt{\frac{۱}{b}}\ ,\ \ \gamma=\sqrt{\frac{-۱}{c}}$$

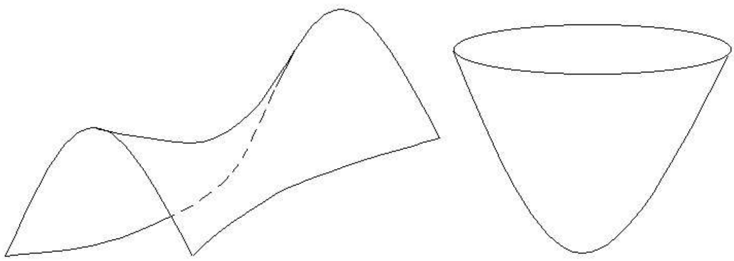
سهمی گون بیضوی. اگر در معادلهٔ (۴.۱) اعداد a و b مثبت و c صفر و f منفی، $x_\circ$، $y_\circ$ و $z_\circ$ جوابی از دو معادلهٔ اول در دستگاه (۵.۱) باشند، آنگاه معادلهٔ (۴.۱) را به صورت

$$z-z_\circ=\frac{(x-x_\circ)^۲}{\alpha^۲}+\frac{(y-y_\circ)^۲}{\beta^۲}$$

می‌توان نوشت. در این حالت، رویه را **سهمی گون بیضوی با رأس در** $(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ **و نیم قطرهای** α و β می‌نامیم (به شکل ۶.۱—(الف) توجه شود)، که در آن

$$\alpha=\sqrt{\frac{-f}{a}}\ ,\ \ \beta=\sqrt{\frac{-f}{b}}$$

سهمی گون هذلولوی. اگر در معادلهٔ (۴.۱) عدد a مثبت، b منفی، c صفر و f منفی باشد، $x_\circ$ و $y_\circ$ جوابی از دو معادلهٔ اول در دستگاه (۵.۱) باشند، آنگاه معادلهٔ (۴.۱)



(ب)　　(الف)

شکل ۱.۶: (الف) سهمی گون بیضوی (ب) سهمی گون هذلولوی

را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$z - z_\circ = \frac{(x-x_\circ)^۲}{\alpha^۲} - \frac{(y-y_\circ)^۲}{\beta^۲}$$

در این حالت، رویه را **سهمی گون هذلولوی با رأس** $(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ **و نیم قطرهای** α و β می‌نامیم (به شکل ۱.۶—(ب) توجه شود)، که در آن

$$\alpha = \sqrt{\frac{-f}{a}} \ , \quad \beta = \sqrt{\frac{f}{b}}$$

قضیه. فرض کنیم $\Delta = abc$ در این صورت

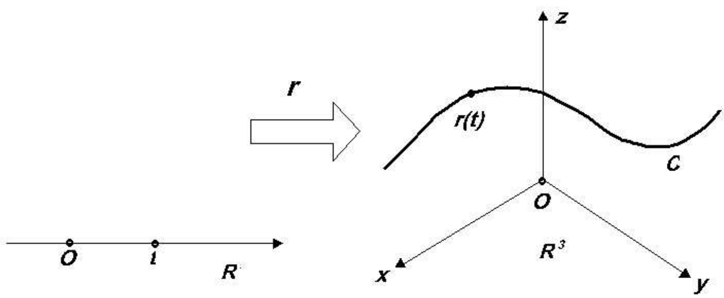
۱) اگر $\Delta > \circ$ آنگاه رویه (۱.۴) هذلولی گون و یا مخروط است.

۲) اگر $\Delta = \circ$ آنگاه رویه (۱.۴) سهمی گون است.

۳) اگر $\Delta < \circ$ آنگاه رویه (۱.۴) بیضی گون یا کره است.

۳.۱ توابع برداری و نظریه خم در صفحه و فضا

اولین دسته از توابعی که در ریاضی عمومی ۲ مطالعه می‌شوند، توابع برداری نام دارند. از این مفهوم برای توضیح منحنی استفاده می‌شود که در قسمت انتگرال خط نوع اول و نوع دوم (در صفحه و در فضا) استفاده می‌شود.



شکل ۷.۱: تابع برداری

۱.۳.۱ تابع برداری.

تابع به شکل $\mathbf{r}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ را **تابع برداری** می‌نامیم. اگر $\mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(x(t),y(t),z(t))}$، آنگاه توابع $x(t)$، $y(t)$ و $z(t)$ را توابع مؤلفه‌ای $\mathbf{r}$ می‌نامیم (به شکل ۷.۱ توجه شود).

اگر $\mathbf{r}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ تابعی برداری، $t_\circ\in\mathrm{Dom}(\mathbf{r})$ و $\mathbf{L}=\overrightarrow{(a,b,c)}$، آنگاه در صورتی می‌گوئیم حد $\mathbf{r}$ در $t_\circ$ برابر $\mathbf{L}$ است که

$$\forall\varepsilon\exists\delta\forall t\ :\ (\circ<|t-t_\circ|<\delta\Rightarrow|\mathbf{r}(t)-\mathbf{L}|<\varepsilon)$$

ثابت می‌شود که این حکم معادل است با این گفته که

$$\lim_{t\to t_\circ}x(t)=a\ \ ,\ \ \lim_{t\to t_\circ}y(t)=b\ \ ,\ \ \lim_{t\to t_\circ}z(t)=c$$

مشابه ریاضی عمومی یک، مشتق تابع برداری قابل تعریف است. بعلاوه،

$$\mathbf{r}'(t_\circ)=\overrightarrow{(x'(t_\circ),y'(t_\circ),z'(t_\circ))}$$

همچنین، داریم

$$\begin{aligned}\int\mathbf{r}\,dt &= \overrightarrow{\left(\int x\,dt,\int y\,dt,\int z\,dt\right)},\\ \int_a^b\mathbf{r}\,dt &= \overrightarrow{\left(\int_a^b x\,dt,\int_a^b y\,dt,\int_a^b z\,dt\right)}.\end{aligned}$$

۲.۳.۱ منحنی و خم. تابع برداری $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^۳$ را در صورتی خم (پارامتری سازی) گوئیم که:

۱) دامنه $\mathbf{r}$ به شکل $[a; b]$ باشد.

۲) $\mathbf{r}$ بر $[a; b]$ پیوسته باشد.

۳) $\mathbf{r}$ بر $(a; b)$ مشتقپذیر باشد.

۴) $\mathbf{r}'$ بر $(a; b)$ مخالف صفر باشد.

۵) $\mathbf{r}$ بر $(a; b)$ یکبیک باشد.

مجموعهٔ $C \subseteq \mathbb{R}^۳$ را در صورتی منحنی (= قوس) گوئیم که اجتماع برد یک یا چند خم باشد. توضیح اینکه می‌بایستی تعداد این خمها متناهی باشد. منحنی را در صورتی بسته گوئیم که دو انتهای آن بر هم منطبق باشند.

۳.۳.۱ طول قوس و پارامتر طبیعی. منحنی $C : \mathbf{r} : [a; b] \to \mathbb{R}^۳$ را در نظر می‌گیریم. تابعی به شرح زیر تعریف می‌کنیم:

$$s(t) = \int_a^t \|\mathbf{r}'(t)\| \, dt, \qquad t \in [a; b]$$

$s(t)$ را طول قوس منحنی از a تا t می‌نامیم، و $\ell = s(b)$ را طول قوس منحنی می‌نامیم. چون $ds/dt = \|\mathbf{r}'(t)\| > ۰$ پس s بر $[a; b]$ معکوسپذیر است. فرض کنیم $t = t(s)$ معکوس آن باشد، تعریف می‌کنیم

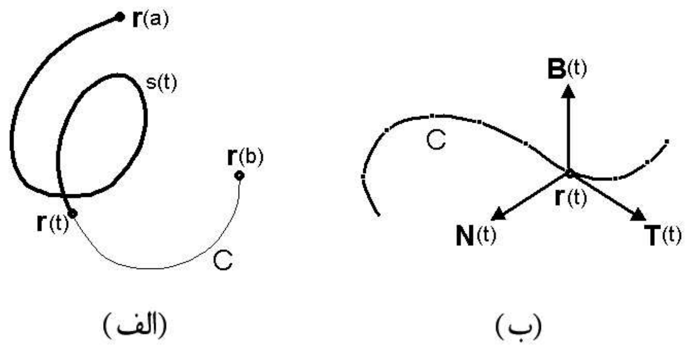
$$C \ : \ \mathbf{r}_n(s) = \mathbf{r}(t(s)) \quad : \quad s \in [۰; \ell]$$

در این صورت، $\mathbf{r}_n(s)$ را پارامتر طبیعی C می‌نامیم. منحنی‌های چند قطعه را نیز با محاسبهٔ پی‌درپی طول قوس قطعات می‌شود تعریف کرد. پارامتر طبیعی بهترین پارامتر برای مطالعه هندسه یک منحنی است (به شکل ۸.۱—(الف) توجه شود).

۴.۳.۱ کنج فرنه، خط مماس، صفحه قائم و .... منحنی پارامتره شدهٔ $C : \mathbf{r} : [a; b] \to \mathbb{R}^۳$ را در نظر می‌گیریم. به هر نقطهٔ $\mathbf{r}(t)$ (که $t \in (a; b)$) سه بردار یکهٔ قائم به شرح زیر نسبت می‌دهیم:

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|}, \quad \mathbf{B}(t) = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}, \quad \mathbf{N}(t) = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$$

$\mathbf{T}(t)$ را **بردار یکهٔ مماس** بر منحنی، $\mathbf{N}(t)$ را **بردار یکهٔ قائم اصلی** بر منحنی و $\mathbf{B}(t)$



شکل ۸.۱: (الف) پارامتر طبیعی (ب) کنج فرنه

را **بردار یکهٔ قائم دوم** بر منحنی در نقطهٔ $\mathbf{r}(t)$ می‌نامیم. اصطلاحاً سه تائی مرتب $\big(\mathbf{T}(t), \mathbf{N}(t), \mathbf{B}(t)\big)$ را **کنج فرنه** [۱] **در نقطهٔ** $\mathbf{r}(t)$ می‌نامیم.

خط گذشته از نقطهٔ $\mathbf{r}(t)$ با بردار هادی $\mathbf{T}(t)$ را **خط مماس بر منحنی** C **در نقطهٔ** $\mathbf{r}(t)$ می‌نامیم. این خط در میان همه خطوط گذشته از نقطهٔ $\mathbf{r}(t)$، به منحنی نزدیکترین است.

صفحهٔ گذشته از نقطهٔ $\mathbf{r}(t)$ با بردار قائم $\mathbf{T}(t)$ را **صفحهٔ قائم بر منحنی** C **در نقطهٔ** $\mathbf{r}(t)$ می‌نامیم.

صفحهٔ گذشته از نقطهٔ $\mathbf{r}(t)$ با بردار قائم $\mathbf{N}(t)$ را **صفحهٔ نوسانی منحنی** C **در نقطهٔ** $\mathbf{r}(t)$ می‌نامیم.

صفحهٔ گذشته از نقطهٔ $\mathbf{r}(t)$ با بردار قائم $\mathbf{B}(t)$ را **صفحهٔ مماس (= بوسان) بر منحنی** C **در نقطهٔ** $\mathbf{r}(t)$ می‌نامیم. این صفحه در میان همه صفحات گذشته از نقطهٔ $\mathbf{r}(t)$ به منحنی نزدیکترین است. (شکل ۸.۱—(ب))

۵.۳.۱ تاب، انحناء و کرهٔ بوسان..

میزان چرخش بردار $\mathbf{T}$ نسبت به طول قوس را **انحناء** $\mathbf{r}$ نامیده و با نماد κ نشان می‌دهیم. میزان چرخش بردار $\mathbf{B}$ نسبت به طول قوس را **تاب** $\mathbf{r}$ نامیده می‌شود و با نماد τ نشان می‌دهیم. ثابت می‌شود که

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}{\|\mathbf{r}'\|^{۳}}, \qquad \tau = \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}') \bullet \mathbf{r}''')}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|^{۲}}$$

عدد $R(t) = ۱/\kappa(t)$ را **شعاع انحناء منحنی در نقطهٔ** $\mathbf{r}(t)$ می‌گوئیم. کرهٔ به مرکز

[۱] Frenet

$\mathbf{r}(t)+R(t)\mathbf{N}(t)$ و شعاع $\mathbf{r}(t)$ را **کرهٔ بوسان منحنی در نقطهٔ** $\mathbf{r}(t)$ می‌نامیم. این کره در نوع خود نزدیک ترین کره به منحنی مفروض در نقطهٔ مورد نظر است.

۶.۳.۱ کاربردهای فیزیکی. در نوشتجات فیزیک، خم را **ضابطهٔ حرکت یک ذرهٔ متحرک** و منحنی را **مسیر حرکت یک ذرهٔ متحرک** می‌نامند. اگر ذرهٔ متحرک: $C:$ $\mathbf{r}:[a;b]\to\mathbb{R}^n$ داده شده باشد، آنگاه $\mathbf{v}(t)=\mathbf{r}'(t)$ **سرعت متحرک** و $\mathbf{a}(t)=\mathbf{r}''(t)$ **شتاب متحرک** در لحظه t است. بردار شتاب را به دو مؤلفه تقسیم می‌کنند:

$$\mathbf{a}_t=(\mathbf{a}\bullet\mathbf{T})\mathbf{T}=\left(\frac{\mathbf{a}\bullet\mathbf{v}}{\mathbf{v}\bullet\mathbf{v}}\right)\mathbf{v},\qquad \mathbf{a}_n=\mathbf{a}-\mathbf{a}_t$$

$\mathbf{a}_t$ را **شتاب مماسی** و $\mathbf{a}_n$ را **شتاب قائم** $\mathbf{r}$ می‌نامیم.

۴.۱ توابع چند متغیره، حد و پیوستگی

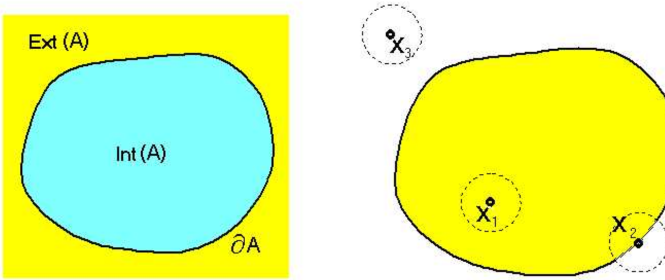
هدف از این بخش آشنایی با مفهوم تابع چند متغیره است که مبنی کار فصول بعدی را تشکیل می‌دهد. همچنین، مفهوم حد توابع چند متغیره نیز مطرح می‌شود.

۱.۴.۱ توپولوژی مجموعهٔ نقاط در $\mathbb{R}^3$. **گوی باز به مرکز** $X_0\in\mathbb{R}^3$ و **شعاع** $r>0$ عبارت است از مجموعهٔ همه نقاطی که فاصلهٔ آنها تا X_0 کمتر از r است.

فرض کنیم $\Omega\subseteq\mathbb{R}^3$ و $X_0\in\Omega$. در صورتی می‌گوئیم X_0 یک **نقطهٔ درونی** Ω است که یک گوی باز به مرکز X_0 طوری یافت گردد که کاملاً در Ω واقع باشد (به نقطه X_1 در شکل ۹.۱—(الف) توجه شود). در صورتی می‌گوئیم X_0 یک **نقطهٔ بیرونی** Ω است که یک گوی باز به مرکز در X_0 طوری یافت گردد که کاملاً در متمم Ω واقع باشد (به نقطه X_2 در شکل ۹.۱—(الف) توجه شود). در صورتی می‌گوئیم X_0 یک **نقطهٔ مرزی** Ω است که هر گوی باز به مرکز در X_0 هم Ω را قطع کرده و هم متمم Ω را قطع کند (به نقطه X_3 در شکل ۹.۱—(الف) توجه شود).

زیرمجموعهٔ $\Omega\subseteq\mathbb{R}^3$ را در صورتی باز گوئیم که همهٔ نقاط آن درونی باشند. مجموعهٔ همه نقاط درونی D را درون D نامیده و با نماد $\mathrm{Int}(D)$ نشان می‌دهیم. ثابت می‌شود که شرط لازم و کافی برای باز بودن D این است که $D=\mathrm{Int}(D)$.

زیر مجموعهٔ $\Omega\subseteq\mathbb{R}^3$ را در صورتی بسته گوئیم که متمم آن باز باشد. مجموعهٔ همه نقاط بیرونی D را بیرون D نامیده و با نماد $\mathrm{Ext}(D)$ نشان می‌دهیم. کوچکترین مجموعهٔ بستهٔ شامل مجموعهٔ D را **بستار** D نامیده و با نماد $\bar{D}$ نشان می‌دهیم. ثابت می‌شود که شرط لازم و کافی برای بسته بودن D این است که $D=\bar{D}$.



(ب) (الف)

شکل ۹.۱: (الف) نقطهٔ درونی، بیرونی و مرزی (ب) درون، بیرون و مرز مجموعه

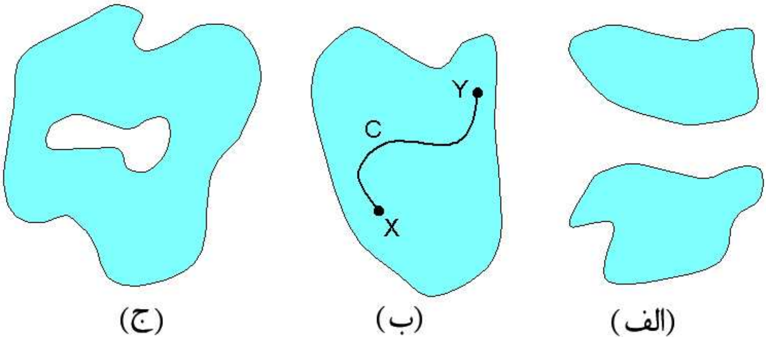
مجموعهٔ همه نقاط مرزی D را **مرز** D نامیده و با نماد ∂D نشان می‌دهیم. ثابت می‌شود که شرط لازم و کافی برای باز بودن D این است که $D \cap \partial D = \emptyset$ و نیز شرط لازم و کافی برای بسته بودن D این است که $\partial D \subseteq D$ (شکل ۹.۱—(ب)) زیرمجموعهٔ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ را در صورتی **کراندار** گوئیم که درون یک گوی قرار بگیرد. زیرمجموعهٔ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ را در صورتی **همبند راهی** گوئیم که هر دو نقطه از آن را توسط یک منحنی پیوسته بتوان به هم متصل کرد. به بیان دیگر، بازاء هر $X, Y \in \Omega$ یک تابع پیوسته $\mathbf{r} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ طوری یافت شود که $\mathbf{r}(0) = X$ و $\mathbf{r}(1) = Y$ (شکل ۱۰.۱—(الف) مجموعه‌ای همبند راهی را نشان می‌دهد و شکل ۱۰.۱—(ب) مجموعه‌ای غیر همبند راهی را نشان می‌دهد).

منحنی C را در صورتی **بسته** گوئیم که دو انتهاء آن برابر باشند. زیر مجموعهٔ همبند راهی $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ را در صورتی **همبند ساده** گوئیم که درون هر منحنی بستهٔ ساده از آن، تماماً به Ω متعلق باشد. در غیر این صورت Ω را **همبند چند گانه** گوییم (مجموعهٔ در شکل ۱۰.۱—(ب) همبند ساده است، در حالی که مجموعهٔ در شکل ۱۰.۱—(ج) همبند چند گانه است).

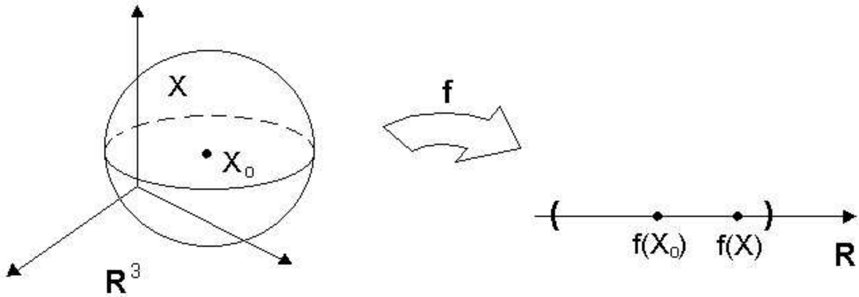
۲.۴.۱ تابع چند متغیره.

تابع $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ را تابع n **متغیره** می‌گوئیم (به شکل ۱۱.۱ توجه شود). روشن است که دامنه چنین تابعی یک زیر مجموعهٔ از $\mathbb{R}^n$ است.

بنا به تعریف **نمودار** (یا **شکل**) تابع f بر مجموعهٔ $D \subseteq \mathrm{Dom} f$ عبارت است از مجموعهٔ همه نقاط به شکل $(X_0, f(X_0)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ با $X_0 \in D$. روشن است که نمودار توابع با بیش از دو متغیر را نمی‌شود به صورت شهودی تجسم کرد.



شکل ۱۰.۱: (الف) مجموعهٔ غیر همبند (ب) مجموعهٔ همبند (ج) مجموعهٔ غیر همبند چندگانه



شکل ۱۱.۱: تعریف حد تابع چند متغیره

۳.۴.۱ تعریف حد.

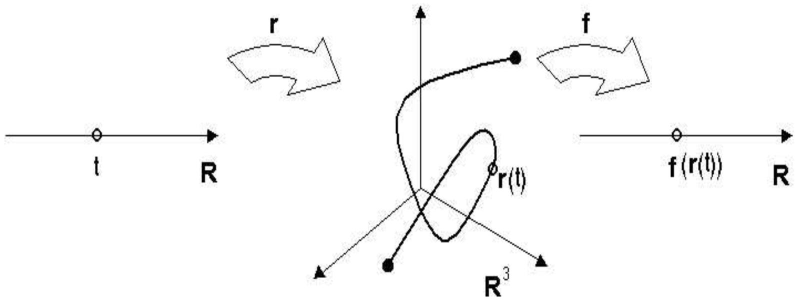
فرض کنیم $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی n متغیره، $X_0 \in \mathbb{R}^n$ و $l \in \mathbb{R}$. در صورتی می‌گوئیم حد f در نقطهٔ X_0 برابر l است که

$$\forall\epsilon\,\exists\delta\,\forall X \;:\; (0 < \|X - X_0\| < \delta \Rightarrow |f(X) - l| < \epsilon)$$

(به شکل ۱۱.۱ توجه شود) اگر $n = 1$، آنگاه این تعریف با تعریف حد مطرح شده در ریاضی یک برابری می‌کند.

۴.۴.۱ حد مسیری.

فرض کنیم $X_0 \in \mathbb{R}^n$، آنگاه منظور از یک مسیر در این نقطه، منحنی‌ای است به شکل $C : \mathbf{r} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ که $\mathbf{r}$ در $t = 0$ پیوسته است



شکل ۱۲.۱: ترکیب توابع

و $\mathbf{r}(\circ) = X_\circ$. در این صورت $\lim_{t\to\circ} f(\mathbf{r}(t))$ را حد مسیری f بر مسیر $\mathbf{r}$ می‌نامیم. حد مسیری در حالت $n = ۱$ با مفهوم حد یکطرفه (مطروح در ریاضی عمومی یک) برابری می‌کند (به شکل ۱۲.۱ توجه شود).

قضیه. شرط لازم و کافی برای اینکه حد تابع f در نقطهٔ $X_\circ$ برابر l باشد این است که کلیهٔ حدهای مسیری f بر مسیرهای منتهی به نقطهٔ $X_\circ$ موجود و برابر l باشند.

معمولاً، از این قضیه در دو مورد استفاده می‌شود:

(الف) حدس مقدار حد: کافی است یک مسیر (هر چند ساده) طوری انتخاب کنیم که از نقطهٔ مورد نظر $X_\circ$ بگذرد و سپس بر آن مسیر حد بگیریم. در صورت وجود، این همان حد احتمالی تابع در نقطهٔ $X_\circ$ است.

(ب) ابطال حد (= اثبات عدم وجود حد): اغلب، این کار به دو طریق انجام می‌پذیرد:
(۱) ثابت می‌شود که حد تابع بر یک مسیر بخصوص وجود ندارد و سپس نتیجه گرفته می‌شود که تابع در آن نقطهٔ حد ندارد. اغلب این مسیر را طوری می‌گیرند که مخرجی صفر شود و یا زیر رادیکالی منفی شود.
(۲) ثابت می‌شود که حد مسیری تابع بر دو مسیر منتهی به نقطهٔ مورد نظر، متفاوت است. سپس نتیجه می‌شود که حد تابع در آن نقطهٔ وجود ندارد. در مورد $n = ۲$، اغلب اولین مسیر انتخابی مسیر $\mathbf{r}_\alpha(t) = (t + x_\circ, \alpha t + y_\circ)$ است.

۵.۱ مشتق توابع چند متغیره

این بخش دومین بخشی است که به مطالعهٔ توابع چند متغیره می‌پردازد. مطالب آن را به عنوان پیشنیازی برای درس معادلات دیفرانسیل معمولی و نیز معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی می‌توان دانست.

۱.۵.۱ مشتق و مشتق جزئی. فرض کنیم تابع $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ در نقطهٔ $X_\circ$ تعریف شود. مشتق f در $X_\circ$ برداری است مانند $\mathbf{v}$ که در شرط زیر صدق می‌کند:

$$\lim_{X \longrightarrow X_\circ} \frac{f(X) - f(X_\circ) - \mathbf{v} \bullet (X - X_\circ)}{\|X - X_\circ\|} = \circ$$

در این صورت $\mathbf{v}$ را **مشتق** f **در** $X_\circ$ نامیده و با نماد $f'(X_\circ)$ نشان می‌دهیم، و یا اینکه **گرادیان** f **در** $X_\circ$ و با نماد $\nabla f(X_\circ)$ یا $\operatorname{grad}(f)\Big|_{X_\circ}$ نشان می‌دهیم.

قضیه. شرط لازم برای مشتق‌پذیری، پیوستگی است. همچنین مجموعهٔ نقاطی که یک تابع مفروض در آن مشتق‌پذیر است، مجموعه‌ای باز می‌باشد.

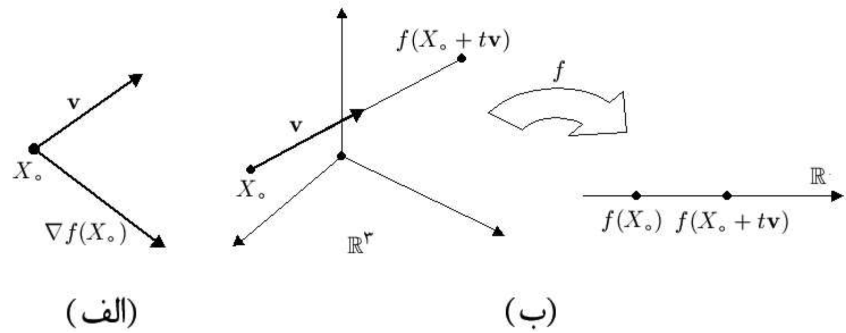
اگر $u = f(x, y, z)$ تابعی مفروض و $X_\circ = (x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ نقطه‌ای از دامنهٔ تعریف f باشد، در این صورت $f(x, y_\circ, z_\circ)$ تابعی با تنها یک متغیر خواهد بود و لذا می‌توان مانند ریاضی عمومی یک از آن مشتق گرفت و سپس آن را در $x = x_\circ$ محاسبه نمود. مقدار حاصل از این روند را **مشتق جزئی** f **نسبت به** x **در نقطهٔ** $X_\circ$ نامیده و با نماد $\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{X_\circ}$ و یا $f_x(X_\circ)$ نشان می‌دهیم. روش ساده‌تر این است که به شکل مجازی فرض کنیم که x تنها متغیر تابع f است و نسبت به آن مشتق بگیریم و آنگاه تابع حاصل را در نقطهٔ $X_\circ$ محاسبه کنیم. به صورت مشابه می‌توان مشتقات جزئی نسبت به سایر متغیرها را تعریف نمود.

قضیه. اگر تابع f و تمام مشتقات جزئی مرتبه اول در نقطهٔ $X_\circ$ پیوسته باشند، در این صورت تابع f در نقطهٔ $X_\circ$ مشتق‌پذیر است.

قضیه. اگر $u = f(x, y, z)$ در نقطهٔ $X_\circ$ مشتقپذیر باشد، آنگاه

$$f'(X_\circ) = \overrightarrow{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{X_\circ}, \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{X_\circ}, \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{X_\circ}\right)}$$

۲.۵.۱ مشتق امتدادی. فرض کنیم تابع $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ در نقطهٔ $X_\circ$ تعریف شود و $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ برداری مخالف با صفر باشد. **مشتق امتدادی (مشتق جهتی، یا مشتق**



شکل ۱۳.۱: (الف) حد مسیری (ب) زاویهٔ بین گرادیان و بردار

سوئی) f **در نقطهٔ** $X_\circ$ **و در راستای بردار v** عبارت است از:

$$\lim_{t \longrightarrow = \circ} \frac{f(X_\circ + t\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|) - f(X_\circ)}{t} = \frac{d}{dt} f(X_\circ + t\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|)\big|_{t=\circ}$$

این عدد را با نماد $D_{\mathbf{v}} f(X_\circ)$ و یا $(\partial f/\partial \mathbf{v})(X_\circ)$ نشان می‌دهیم. این عدد برابر است با **میزان تغییرات تابع** f **هنگامی که متغیر آن از نقطهٔ** $X_\circ$ **در امتداد بردار v شروع به حرکت می‌کند** (به شکل ۱۳.۱—(الف) توجه شود).

ثابت می‌شود که اگر f در $X_\circ$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه

$$D_{\mathbf{v}} f(X_\circ) = \nabla f(X_\circ) \bullet \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\| = \|\nabla f(X_\circ)\| \cos\big(\text{زاویه بین } \mathbf{v} \text{ و } \nabla f(X_\circ)\big)$$

در نتیجه، حداکثر مقدار مشتق امتدادی تابع f در نقطهٔ $X_\circ$، در امتداد بردار $\nabla f(X_\circ)$ اتفاق می‌افتد و مقدار آن برابر است با $\|\nabla f(X_\circ)\|$. به صورت مشابه، حداقل مقدار مشتق امتدادی تابع f در نقطهٔ $X_\circ$، در امتداد بردار $-\nabla f(X_\circ)$ اتفاق می‌افتد و مقدار آن برابر است با $-\|\nabla f(X_\circ)\|$ (به شکل ۱۳.۱—(ب) توجه شود).

۳.۵.۱ قاعده زنجیره‌ای مشتق. فرض کنیم تابع برداری $\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(x(t), y(t), z(t))}$ در نقطهٔ $t_\circ$ و تابع سه متغیره f در نقطهٔ $X_\circ = \mathbf{r}(t_\circ)$ مشتق پذیر است. در این صورت تابع $f \circ \mathbf{r}$ در نقطهٔ $t_\circ$ مشتق پذیر است و داریم

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

به بیان کلی‌تر، اگر f تابعی از x، y و z باشد و توابع x، y و z نیز به نوبهٔ خود توابعی از u (و احتمالاً چند متغیر دیگر) باشند، آنگاه

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$$

مشتق ضمنی. به عنوان یک نتیجه ثابت می‌شود که اگر f تابعی از x، y و z باشد و z را به عنوان تابعی از سایر متغیرها بیان کنیم، آنگاه

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial z}$$

۴.۵.۱ ژاکوبین.

فرض کنیم $y_۱$، $y_۲$ و y_n توابعی از $x_۱$، $x_۲$ و x_m باشند، آنگاه ماتریس ژاکوبین (تعمیم مشتق) y_i ها نسبت به x_i ها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم، که ماتریسی $n\times m$ است.

$$\frac{D(y_۱,y_۲,\cdots,y_n)}{D(x_۱,x_۲,\cdots,x_m)}=\begin{bmatrix}\partial y_۱/\partial x_۱ & \partial y_۱/\partial x_۲ & \cdots & \partial y_۱/\partial x_m\\ \partial y_۲/\partial x_۱ & \partial y_۲/\partial x_۲ & \cdots & \partial y_۲/\partial x_m\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \partial y_n/\partial x_۱ & \partial y_n/\partial x_۲ & \cdots & \partial y_n/\partial x_m\end{bmatrix}$$

دترمینان این ماتریس را **ژاکوبی** y_i ها نسبت به x_i ها می‌نامیم.

قضیه. چنانچه z_i ها توابعی از y_i ها و y_i ها نیز توابعی از x_i ها باشند، در این صورت

$$۱)\quad \frac{D(z_۱,z_۲,\cdots,z_n)}{D(y_۱,y_۲,\cdots,y_m)}\frac{D(y_۱,y_۲,\cdots,y_m)}{D(x_۱,x_۲,\cdots,x_l)}=\frac{D(z_۱,z_۲,\cdots,z_n)}{D(x_۱,x_۲,\cdots,x_l)}$$

$$۲)\quad \frac{D(y_۱,y_۲,\cdots,y_n)}{D(x_۱,x_۲,\cdots,x_n)}=\left[\frac{D(x_۱,x_۲,\cdots,x_n)}{D(y_۱,y_۲,\cdots,y_n)}\right]^{-۱}$$

$$۳)\quad \frac{D(x_۱,x_۲,\cdots,x_n)}{D(x_۱,x_۲,\cdots,x_n)}=I_n$$

نتیجه. اگر دترمینان $\frac{\Delta(\cdots)}{\Delta(\cdots)}$ را با نماد $\frac{\partial(\cdots)}{\partial(\cdots)}$ نشان دهیم، در این صورت

$$۱)\quad \frac{\partial(z_۱,z_۲,\cdots,z_n)}{\partial(y_۱,y_۲,\cdots,y_m)}\frac{\partial(y_۱,y_۲,\cdots,y_m)}{\partial(x_۱,x_۲,\cdots,x_l)}=\frac{\partial(z_۱,z_۲,\cdots,z_n)}{\partial(x_۱,x_۲,\cdots,x_l)}$$

$$۲)\quad \frac{\partial(y_۱,y_۲,\cdots,y_n)}{\partial(x_۱,x_۲,\cdots,x_n)}=۱\div\frac{\partial(x_۱,x_۲,\cdots,x_n)}{\partial(y_۱,y_۲,\cdots,y_n)}$$

$$۳)\quad \frac{\partial(x_۱,x_۲,\cdots,x_n)}{\partial(x_۱,x_۲,\cdots,x_n)}=۱$$

۵.۵.۱ دیفرانسیل.

فرض کنیم تابع سه متغیرهٔ f در نقطهٔ $X_\circ$ مشتق‌پذیر باشد. تابعی $df|X_\circ : \mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}^۳$ به $df\big|_{X_\circ}(\mathbf{v}) = f'(X_\circ)\bullet\mathbf{v}$ تعریف می‌کنیم. اگر x، y و z را بعنوان توابعی بشکل $\mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}$ در نظر بگیریم، آنگاه

$$df\big|_{X_\circ} = \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{X_\circ} dx\big|_{X_\circ} + \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{X_\circ} dy\big|_{X_\circ} + \frac{\partial f}{\partial z}\bigg|_{X_\circ} dz\big|_{X_\circ}$$

یا بطور خلاصه $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$.

قضیه. شرط لازم و کافی برای اینکه توابع (یا متغیرهای) x، y و z مستقل باشند (یعنی به یکدیگر بستگی نداشته باشند)، آن است که dx، dy و dz مستقل خطی باشند، یعنی از تساوی $Pdx + Qdy + Rdz = ۰$ نتیجه می‌شود که $P \equiv ۰$، $Q \equiv ۰$ و $R \equiv ۰$ (به عنوان توابعی از x، y و z).

عبارت دیفرانسیلی $\eta = Pdx + Qdy + Rdz$ را در صورتی بر مجموعهٔ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^۳$ **کامل** گوئیم که تابعی $f(x,y,z)$ چنان یافت شود که $df = \eta$. به بیان دیگر

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P, \frac{\partial f}{\partial y} = Q, \frac{\partial f}{\partial z} = R\bullet$$

شرط لازم و کافی برای کامل بودن η این است که Ω بسته، کراندار و محدب باشد و نیز داشته باشیم

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$$

۶.۵.۱ مشتقات جزئی از مرتبه بالا.

فرض کنیم f تابعی از x، y و z باشد. فرض کنیم $\partial f/\partial x$ در نقطهٔ $X_\circ$ مشتق‌پذیر باشد، در این صورت مشتق جزئی $\partial f/\partial x$ نسبت به y را با یکی از نمادهای زیر نشان می‌دهیم

$$\frac{\partial^۲ f}{\partial y \partial x}\Big|_{X_\circ} \quad , \quad f_{xy}(X_\circ) \quad , \quad f_{۱۲}(X_\circ)$$

قضیه. اگر f_{xy} و f_{yx} در $X_\circ$ پیوسته باشند، آنگاه برابر هستند.

به صورت مشابه، مشتقات جزئی از مراتب بالا تعریف می‌شوند و حکم مشابه بالا نیز در مورد ترتیب مشتق‌گیری در آنها صحیح است.

۷.۵.۱ قضیه تیلور. فرض کنیم f تابعی دو متغیره باشد و $X_\circ$ و X دو نقطهٔ معلوم باشند و تعریف می‌کنیم $\Delta X = X - X_\circ = (\Delta x, \Delta y)$. همچنین، فرض کنیم ∇ عملگر مشتق اول باشد، آنگاه عملگر D را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$D = \Delta X \bullet \nabla = \Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}$$

بنابراین اگر f تابعی دو متغیره باشد، آنگاه

$$\begin{aligned}
Df &= (\Delta X \bullet \nabla)(f) = \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y} \\
D^{۲} f &= (\Delta X \bullet \nabla)^{۲}(f) = \Delta x^{۲} \frac{\partial^{۲} f}{\partial x^{۲}} + ۲\Delta x \Delta y \frac{\partial^{۲} f}{\partial x \partial y} + \Delta y^{۲} \frac{\partial^{۲} f}{\partial y^{۲}} \\
D^{۳} f &= (\Delta X \bullet \nabla)^{۳}(f) = \Delta x^{۳} \frac{\partial^{۳} f}{\partial x^{۳}} + ۳\Delta x^{۲} \Delta y \frac{\partial^{۳} f}{\partial x^{۲} \partial y} \\
&\quad + ۳\Delta x \Delta y^{۲} \frac{\partial^{۳} f}{\partial x \partial y^{۲}} + \Delta y^{۳} \frac{\partial^{۳} f}{\partial y^{۳}} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

اکنون آمادگی لازم برای طرح قضیهٔ تیلور وجود دارد.

قضیه تیلور. اگر مشتقات جزئی تا مرتبه $(k+۱)$ ام تابع $f(x,y)$ در نقطهٔ $X_\circ$ پیوسته باشند، آنگاه تابع $h(x,y)$ طوری یافت می‌شود که

$$f(X) = f(X_\circ) + Df(X_\circ) + D^{۲} f(X_\circ) + \cdots + D^k f(X_\circ) + h(X)$$

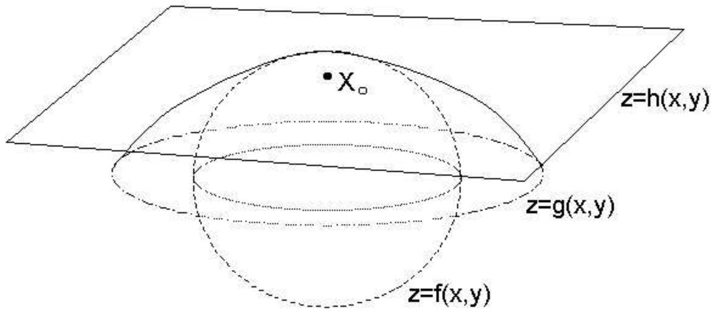
که در آن $\lim\limits_{X \to X_\circ} \dfrac{h(X)}{\|X - X_\circ\|^k} = \circ$. در این صورت

$$f(X_\circ) + Df(X_\circ) + D^{۲} f(X_\circ) + \cdots + D^k f(X_\circ) + h(X)$$

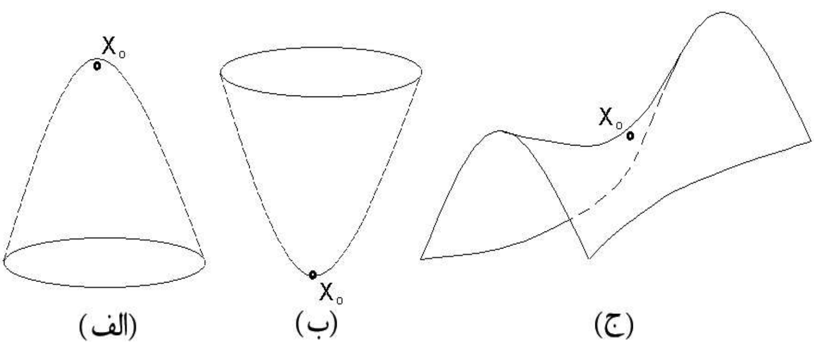
را **بسط تیلور مرتبه k ام تابع f در نقطهٔ** $X_\circ$ می‌گوئیم و h را **تابع خطا** می‌نامیم.

به عنوان مثال، اگر $f(x,y) = \sqrt{۱ - x^{۲} - y^{۲}}$، آنگاه بسط تیلور مرتبه اول و دوم f در نقطهٔ $X_\circ = (\circ, \circ)$ به ترتیب برابر است با $g(x,y) = ۱$ و $h(x,y) = ۱ - \frac{x^{۲}}{۲} - \frac{y^{۲}}{۲}$ (به شکل ۱۴.۱ توجه شود).

۸.۵.۱ مسألهٔ اکسترمم موضعی. فرض کنیم $f : \mathbb{R}^{۳} \to \mathbb{R}$ و $X_\circ \in D$، آنگاه $X_\circ$ را در صورتی یک نقطهٔ ماکزیمم موضعی f گوئیم که یک گوی به مرکز $X_\circ$



شکل ۱۴.۱: بسط تیلور



شکل ۱۵.۱: (الف) ماکزیموم موضعی (ب) مینیموم موضعی (ج) نقطهٔ زینی

طوری یافت گردد که $f(X_\circ)$ ماکزیمم f بر آن گوی باشد. به صورت مشابه، $X_\circ$ را در صورتی یک نقطهٔ مینیمم موضعی f گوئیم که یک گوی به مرکز $X_\circ$ طوری یافت گردد که $f(X_\circ)$ مینیمم f بر آن گوی باشد.

آزمون مشتق اول. اگر مشتقات جزئی مرتبه اول تابع f در نقطهٔ $X_\circ$ موجود باشند و $X_\circ$ یک نقطهٔ اکسترمم موضعی f باشد، آنگاه می‌بایستی کلیه مشتقات جزئی f در $X_\circ$ برابر صفر باشند. این گونه نقاط را **نقاط تکین تابع** f می‌نامند.

آزمون مشتق دوم. فرض کنیم $X_\circ$ یک نقطهٔ اکسترمم موضعی $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ باشد، در این صورت

الف) اگر $f_{xx}(X_\circ) < \circ$ و $f_{xx}(X_\circ)f_{yy}(X_\circ) - f_{xy}(X_\circ)^2 > \circ$، آنگاه f در $X_\circ$ دارای ماکزیمم موضعی است (به قسمت (a) از شکل ۱۵.۱ توجه شود).

ب) اگر $f_{xx}(X_\circ) > \circ$ و $f_{xx}(X_\circ)f_{yy}(X_\circ) - f_{xy}(X_\circ)^۲ > \circ$، آنگاه f در $X_\circ$ دارای منیمم موضعی است (به قسمت (b) از شکل ۱۵.۱ توجه شود).

ج) اگر $f_{xx}(X_\circ)f_{yy}(X_\circ) - f_{xy}(X_\circ)^۲ < \circ$، آنگاه f در $X_\circ$ دارای نقطهٔ زینی است (به قسمت (c) از شکل ۱۵.۱ توجه شود).

د) اگر $f_{xx}(X_\circ)f_{yy}(X_\circ) - f_{xy}(X_\circ)^۲ = \circ$ باید از روشهای پیشرفته‌تر استفاده شود.

۹.۵.۱ مسألهٔ اکسترمم سراسری.

فرض کنیم $D \in \mathbb{R}^n$ مجموعه‌ای بسته و کراندار باشد و $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ بر D تعریف گردد. اگر نقاط $X_۲ \in D$، $X_۱$ طوری یافت شوند که به ازای هر $X \in D$ ای $f(X_۱) \leq f(X) \leq f(X_۲)$، آنگاه $X_۱$ را یک نقطهٔ مینیمم، $X_۲$ را یک نقطهٔ ماکزیمم، $f(X_۱)$ را مینیمم و $f(X_۲)$ را ماکزیمم f بر D می‌نامیم.

قضیهٔ وجود. اگر D مجموعه‌ای بسته و کراندار بوده و f بر D پیوسته باشد، آنگاه مساله اکسترمم برای f و D دارای جواب است.

نقطهٔ $X_\circ \in \mathrm{Int}(D)$ را در صورتی یک نقطهٔ تکین f بر D گوئیم که f در $X_\circ$ مشتق‌پذیر نباشد و یا اینکه مشتق پذیر بوده و $\nabla f(X_\circ) = \mathbf{0}$.

قضیه. اگر $X_\circ$ یک جواب از مسألهٔ اکسترمم f بر D باشد، آنگاه $X_\circ \in \partial D$ و یا اینکه $X_\circ$ یک نقطهٔ تکین f بر $\mathrm{Int}(D)$ است.

الگوریتم اکسترمم سراسری. اگر D بسته و کراندار باشد و f بر D پیوسته باشد، مسألهٔ اکسترمم f بر D را به صورت زیر حل می‌کنیم:

الف) نقاط تکین f بر $\mathrm{Int}D$ را یافته و سپس مقدار f را بر هر یک از آنها محاسبه می‌کنیم.

ب) ماکزیمم و مینیمم مقدار f را بر مرز ناحیه D، یعنی ∂D، می‌یابیم.

ج) با مقایسه مقادیر به دست آمده در دو قسمت بالا، نقاط ماکزیمم و مینیمم و نیز مقادیر ماکزیمم و مینیمم f را بر D می‌یابیم.

۱۰.۵.۱ مسألهٔ اکسترمم مشروط. اگر f و g توابعی n متغیر باشند، آنگاه شرط لازم برای اینکه $X_\circ$ یک نقطهٔ اکسترمم موضعی f با شرط $g = \circ$ باشد، این است که عددی مانند λ طوری یافت گردد که $\nabla f(X_\circ) = \lambda \nabla g(X_\circ)$.

تعمیم اگر f و $g_۱$، $g_۲$، $\cdots$ و g_k توابعی n متغیر باشند که $۱ \leq k < n$، آنگاه شرط لازم برای اینکه $X_\circ$ یک نقطهٔ اکسترمم موضعی f با شرط $g_۱ = g_۲ = \cdots = g_k = \circ$ باشد، این است که اعدادی مانند $\lambda_۱$، $\lambda_۲$، $\cdots$ و λ_k طوری یافت گردند که

$$\nabla f(X_\circ) = \lambda_۱ \nabla g_۱(X_\circ) + \lambda_۲ \nabla g_۲(X_\circ) + \cdots + \lambda_k \nabla g_k(X_\circ)$$

۶.۱ انتگرال دوگانه

هدف از این بخش معرفی مفهوم انتگرال دوگانه می‌باشد. این مفهوم نقشی کلیدی در انتگرال سه‌گانه، انتگرال سطح و فضای کلاسیک دارد.

۱.۶.۱ تعریف. فرض کنیم $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ و $D \subseteq \mathbb{R}^۲$. همچنین، فرض کنیم $D \subseteq [a;b] \times [c;d]$ و n و m اعداد طبیعی هستند. فرض کنیم

$$a = x_\circ \leq x_۱ \leq x_۲ \leq \cdots \leq x_n = b$$

$$c = y_\circ \leq y_۱ \leq y_۲ \leq \cdots \leq y_m = d$$

افرازهایی از این دو بازه باشند. فرض کنیم

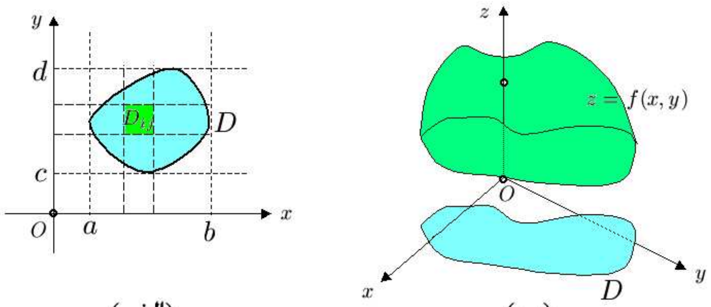
$$D_{ij} = [x_{i-۱}; x_i] \times [y_{j-۱}; y_i] \cap D \quad , \quad ۱ \leq \leq n \quad , \quad ۱ \leq j \leq m$$

این را یک افراز از D می‌نامیم (به قسمت (الف) از شکل ۱۶.۱ توجه شود). بنابه تعریف اگر $\Delta x_i = x_i - x_{i-۱}$ و $\Delta y_i = y_j - y_{j-۱}$، آنگاه **طول** این افراز برابر

$$L = \min\{\Delta x_۱, \Delta x_۲, \cdots, \Delta x_n, \Delta y_۱, \Delta y_۲, \cdots, \Delta y_m\}$$

است و $N = \max\{n, m\}$ را **ظرافتِ** افراز می‌نامیم. فرض کنیم $(x_i, y_j) \in D_{ij}$ و $\text{Area}(D_{ij})$ نمایشگر مساحت D_{ij} باشید، در این صورت اگر حد

$$\lim_{L \to \circ} \lim_{N \to \infty} \sum_{i=۱}^{n} \sum_{j=۱}^{m} f(x_i, y_j)\ \text{Area}(D_{ij})$$



(الف) (ب)

شکل ۱۶.۱: تعریف انتگرال دوگانه

موجود باشد، آنگاه می‌گوئیم f بر D انتگرال‌پذیری است و مقدار این حد را **انتگرال** f بر D نامیده و با نماد $\iint_D f\,dxdy$ نشان می‌دهیم (به قسمت (b) از شکل ۱۶.۱ توجه شود).

قضیه. اگر D بسته و کراندار و f بر D پیوسته باشد، آنگاه f بر D انتگرال‌پذیر است.

قضیه. فرض کنیم f و g دو تابع دو متغیره، a عددی حقیقی و D_1 و D_2 دو زیر مجموعه از $\mathbb{R}^2$ باشند. در این صورت

۱) $\iint_D g\,dxdy + \iint_D f\,dxdy = a\iint_D f\,dxdy + \iint_D g\,dxdy$ — یعنی $\iint_D (af+g)\,dxdy = a\iint_D f\,dxdy + \iint_D g\,dxdy$.

۲) اگر $\text{Area}(D_1 \cap D_2) = \phi$، آنگاه
$$\iint_{D_1\cup D_2} f\,dxdy = \iint_{D_1} f\,dxdy + \iint_{D_2} f\,dxdy.$$

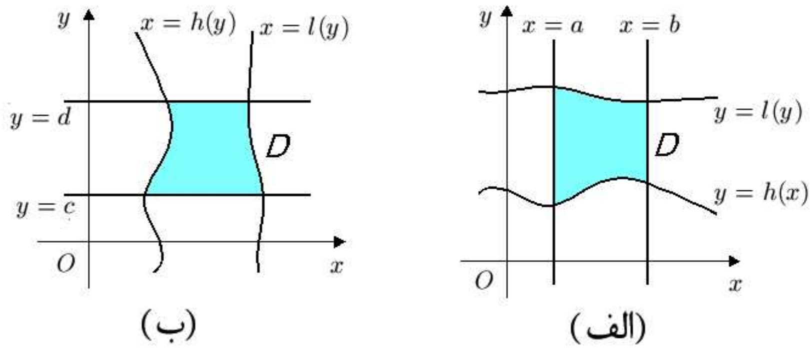
۳) اگر f تابعی نامنفی و $D_1 \subseteq D_2$، آنگاه $\iint_{D_1} f\,dxdy \leq \iint_{D_2} f\,dxdy$.

۴) اگر $\text{Area}(D) = 0$، آنگاه $\iint_D f\,dxdy = 0$.

۵) اگر $\text{Area}\{X \in D | f(x) \neq g(X)\} = 0$، آنگاه $\iint_D f\,dxdy = \iint_D g\,dxdy$.

۶) اگر $\forall X \in D \;:\; f(X) \leq g(X)$، آنگاه $\iint_D f\,dxdy \leq \iint_D g\,dxdy$.

۷) اگر $M = \max\{f(x) | X \in D\}$ و $m = \min\{f(X) | X \in D\}$، آنگاه
$m \times \text{Area}(D) \leq \iint_D f\,dxdy \leq M \times \text{Area}(D)$.



شکل ۱۷.۱: منظمy−منظم (ب) مجموعهٔ x−(الف) مجموعهٔ

۸) $\left|\iint_D f\,dxdy\right| \leq \iint_D |f|\,dxdy$.

۲.۶.۱ مجموعهٔ x−منظم و انتگرال مکرر.

زیر مجموعه D از $\mathbb{R}^2$ را در صورتی x−**منظم** گوئیم (به شکل ۱۷.۱−(الف) توجه شود) که آنرا به صورت زیر بتوان نوشت

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, h(x) \leq y \leq l(x)\} \qquad (۶.۱)$$

مفهوم **مجموعهٔ** y−**منظم** به صورت مشابه قابل تعریف است (به شکل ۱۷.۱−(ب) توجه شود).

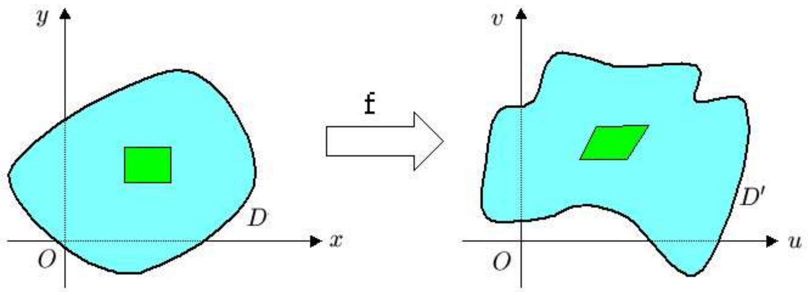
قضیه. اگر D مجموعه‌ای x−منظم بوده و به صورت (۶.۱) قابل بیان باشد و f بر D پیوسته باشد، آنگاه

$$\iint\limits_D f\,dxdy = \int_a^b \left[\int_{h(x)}^{l(x)} f(x, y)\,dy\right] dx$$

بسیاری از مسائل انتگرال با تعویض ترتیب انتگرال قابل حل می‌باشند. یعنی ممکن است شکل x − منظم یک مساله قابل حل نباشد و یا اینکه به سختی حل شود، ولی شکل y − منظم این چنین نباشد.

نتیجه. اگر بتوان نوشت $f(x, y) = g(x)h(y)$ و نیز اگر D ناحیه‌ای مستطیل شکل باشد (یعنی، $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$)، آنگاه

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_c^d g(y)\,dy\right)$$



شکل ۱۸.۱: تغییر متغیر در انتگرال دوگانه

۳.۶.۱ تغییر متغیر (یا مختصات).

بسیاری از مسایل انتگرال دو گانه را با تغییر متغیر به مسایل ساده‌تر می‌توان تبدیل نمود. معمولاً حاصل کار با دامنهٔ مستطیل شکل است.

قضیهٔ تغییر متغیر. فرض کنیم $D' \subseteq Ouv$ و $x = X(u,v)$ و $y = Y(u,v)$ توابعی مشتق‌پذیر بر D' هستند. فرض کنیم نگاشت $(u,v) \mapsto (X(u,v), Y(u,v))$ بر D' یکبیک است و $D \subseteq Oxy$ تصویر D' تحت تأثیر این نگاشت است و $\partial(x,y)/\partial(u,v)$ بر D' مخالف صفر است. در این صورت

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D'} f(X(u,v),Y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

توضیح اینکه، اگر یکی و یا همهٔ شرایط آمده در صورت قضیه بالا در مورد زیر مجموعه‌ای با مساحت صفر از D' برقرار نباشند، آنگاه هنوز هم حکم این قضیه صادق است (به شکل ۱۸.۱ توجه شود).

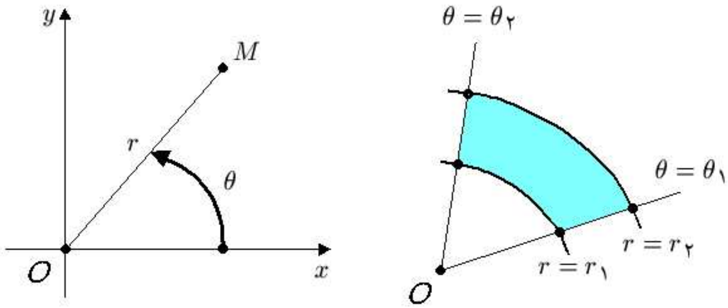
تغییر مختصات قطبی و تغییر مختصات خطی مهمترین تغییر مختصات در انتگرالهای دوگانه به شمار می آیند.

تغییر مختصات خطی. در اینجا فرض می‌شود که

$$x = a_1u + b_1v + c_1 \quad , \quad y = a_2u + b_2v + c_2$$

که a_1، b_1، c_1، a_2، b_2 و c_2 اعداد ثابت هستند. در نتیجه

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$



شکل ۱۹.۱: تغییر متغیر قطبی

حسن این تغییر متغیر در آن است که تصویر هر خط، یک خط می‌شود. بنابراین، برای تصویر مثلاً یک مثلث کافی است که اضلاع آن مثلث را تصویر کنیم و یا ابتدا رئوس آن مثلث را تصویر کرده و سپس نقاط به دست آمده را به هم وصل کنیم.

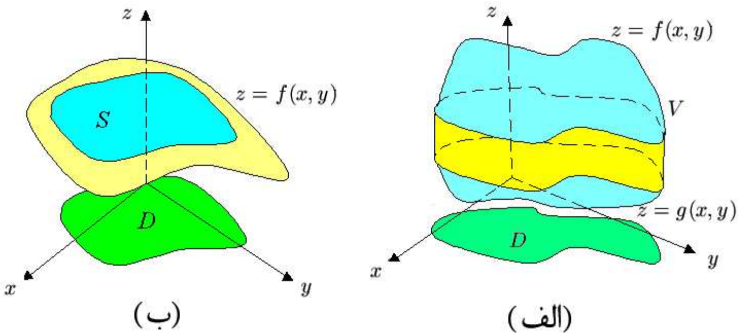
تغییر مختصات قطبی. در اینجا فرض می‌شود که $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$. که در آن $r = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ فاصله نقطهٔ (x, y) از مبدأ است و $\theta = \text{Arctan}(y/x)$ زاویه میان بردار واصل میان مبدأ و نقطهٔ (x, y) و بردار i (یعنی راستای محور x ها) است. در نتیجه،

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \det\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} = r$$

حسن این تغییر متغیر در آن است که تصویر هر ناحیهٔ دایره‌ای شکل، به مرکز مبدأ ناحیه‌ای مستطیل شکل می‌شود. بنابراین اگر در مسأله‌ای عبارت $x^۲ + y^۲$ ظاهر شود، استفاده از این تغییر مختصات ممکن است مفید باشد (به شکل ۱۹.۱ توجه شود).

نتیجه. اگر ناحیه D نسبت به x متقارن باشد (با تغییر x به $-x$ ناحیه D تغییر نکند) و تابع f نسبت به x فرد باشد (با تغییر x به $-x$ علامت f عوض شود)، آنگاه انتگرال f بر D برابر صفر است. برای اثبات این مطلب، کافی است از تغییر متغیر $v = y$، $u = -x$ استفاده کنیم.

اگر ناحیه D نسبت به y متقارن باشد (با تغییر y به $-y$ ناحیه D تغییر نکند) و تابع f نسبت به y فرد باشد (با تغییر y به $-y$ علامت f عوض شود)، آنگاه انتگرال f بر D برابر صفر است. برای اثبات این مطلب، کافی است از تغییر متغیر $v = -y$، $u = x$ استفاده کنیم.



شکل ۱.۲۰: (الف) حجم بین دو نمودار (ب) مساحت قسمتی از یک نمودار

۱.۶.۴ کاربردها.

انتگرال دوگانه کاربردهای فراوانی در ریاضیات، فیزیک و مهندسی دارد. برخی از عمومی ترین کاربردهای آن عبارتند از:

کاربرد در محاسبه حجم محدود میان نمودار دو تابع دو متغیره. اگر f و g دو تابع دو متغیره باشند و $D \subseteq \mathrm{Dom}(f) \bigcap \mathrm{Dom}(g)$، آنگاه حجم جسم صلب Ω محدود میان نمودار این دو تابع و نیز استوانه‌ای که قاعده‌اش مرز مجموعه D (به شکل ۱.۲۰—(الف) توجه شود)، برابر $\mathrm{Vol}(\Omega) = \iint_D (f(x, y) - g(x, y))\, dxdy$ است.

کاربرد در محاسبه مساحت ناحیهٔ دو بعدی در صفحه. اگر D ناحیه‌ای محدود در صفحه باشد، آنگاه مساحت آن برابر $\mathrm{Area}(D) = \iint_D ۱\, dxdy$ است.

کاربرد در محاسبهٔ مساحت قسمتی از نمودار تابع دو متغیره. مساحت S قسمتی از نمودار تابع f که تصویر آن بر صفحه Oxy برابر D است (به شکل ۱.۲۰—(ب) توجه شود)، عبارت $\mathrm{Area}(S) = \iint_D \sqrt{۱ + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^۲ + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^۲}\, dxdy$ است.

کاربرد در محاسبه جرم جسم دو بعدی در صفحه. اگر نقطهٔ به مختصات (x, y) از جسم دو بعدی D دارای چگالی جرم $\delta(x, y)$ باشد، آنگاه جرم D برابر است با

$$m(D) = \iint_D x\delta(x, y)\, dxdy$$

کاربرد در محاسبه مرکز ثقل جسم دو بعدی در صفحه. اگر نقطهٔ به مختصات (x, y) از جسم دو بعدی D دارای چگالی جرم $\delta(x, y)$ باشد و $C = (a, b)$ مرکز ثقل آن باشد،

آنگاه

$$a = \frac{1}{m}\iint\limits_D x\delta(x,y)\,dxdy, \qquad b = \frac{1}{m}\iint\limits_D y\delta(x,y)\,dxdy$$

که در اینجا m جرم D است.

کاربرد در محاسبهٔ گشتاور جسم دو بعدی در صفحه حول یک خط راست. اگر نقطهٔ به مختصات (x,y) از جسم دو بعدی D دارای چگالی جرم $\delta(x,y)$ باشد و ℓ خطی به معادلهٔ $ax+by+c=0$، آنگاه گشتاور D حول خط ℓ برابر است با

$$M_\ell(D) = \iint\limits_D \frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\delta(x,y)\,dxdy$$

دو حالت خاص آن عبارتند از

$$M_x(D) = \iint\limits_D y\delta(x,y)\,dxdy$$ حول محور x ها

$$M_y(D) = \iint\limits_D x\delta(x,y)\,dxdy$$ حول محور y ها

کاربرد در محاسبه گشتاور ماند جسم دو بعدی در صفحه حول یک نقطه. اگر نقطهٔ به مختصات (x,y) از جسم دو بعدی D دارای چگالی جرم $\delta(x,y)$ باشد و به علاوه $X_0=(x_0,y_0)$ نقطه‌ای دلخواه باشد، آنگاه گشتاور D حول X_0 برابر است با

$$M_{x_0}(D) = \iint\limits_D \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\,\delta(x,y)\,dxdy$$

یک حالت خاص آن عبارت است از

$$M_O(D) = \iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,\delta(x,y)\,dxdy$$ گشتاور حول مبدأ

کاربرد در محاسبه گشتاور ماند جسم دو بعدی در صفحه حول یک خط راست. اگر نقطهٔ به مختصات (x,y) از جسم دو بعدی D دارای چگالی جرم $\delta(x,y)$ باشد و ℓ خطی به معادلهٔ $ax+by+c=0$، آنگاه گشتاور ماند D حول خط ℓ برابر است با

$$I_\ell(D) = \iint\limits_D \frac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}\delta(x,y)\,dxdy$$

دو حالت خاص آن عبارتند از

$$I_x(D) = \iint\limits_D y^{۲}\delta(x,y)\,dxdy \qquad \text{گشتاور حول محور } x \text{ ها}$$

$$I_y(D) = \iint\limits_D x^{۲}\delta(x,y)\,dxdy \qquad \text{گشتاور حول محور } y \text{ ها}$$

کاربرد در محاسبهٔ گشتاور ماند جسم دو بعدی در صفحه حول یک نقطه اگر نقطهٔ به مختصات (x,y) از جسم دو بعدی D دارای چگالی جرم $\delta(x,y)$ باشد و $X_{\circ} = (x_{\circ}, y_{\circ})$ نقطه‌ای دلخواه باشد، آنگاه گشتاور ماند D حول $X_{\circ}$ برابر است با

$$I_{x_{\circ}}(D) = \iint\limits_D \{(x-x_{\circ})^{۲} + (y-y_{\circ})^{۲}\}\delta(x,y)\,dxdy$$

یک حالت خاص آن عبارت است از

$$I_O(D) = \iint\limits_D (x^{۲}+y^{۲})\delta(x,y)\,dxdy \qquad \text{گشتاور حول مبدأ}$$

۷.۱ انتگرال سه گانه

انتگرال سه گانه تعمیم طبیعی انتگرال دوگانه است و کاربرد فراوانی در علوم و مهندسی دارد. در بخش قضایای کلاسیک نیز از آن استفاده خواهد شد.

۱.۷.۱ تعریف. فرض کنیم $f : \mathbb{R}^{۳} \to \mathbb{R}$ و $V \subseteq \mathbb{R}^{۳}$. فرض کنیم $V \subseteq [a;b]\times[c;d]\times[g;h]$ و n، m و l اعداد طبیعی هستند. فرض کنیم

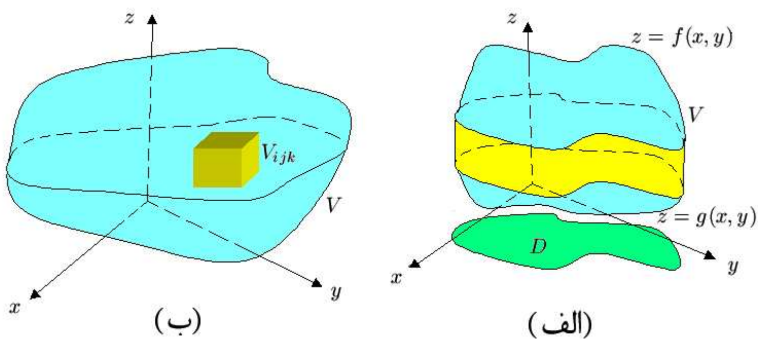
$$a = x_{\circ} \le x_{۱} \le x_{۲} \le \cdots \le x_n = b$$

$$c = y_{\circ} \le y_{۱} \le y_{۲} \le \cdots \le y_m = d$$

$$g = z_{\circ} \le z_{۱} \le z_{۲} \le \cdots \le z_l = h$$

افرازهای برای این سه بازه باشند. فرض کنیم

$$V_{ijk} = [x_{i-۱}; x_i] \times [y_{j-۱}; y_i] \times [z_{k-۱}; z_k] \cap V$$



شکل ۲۱.۱: انتگرال سه‌گانه

که $1 \leq l \leq n$، $1 \leq j \leq m$ و $1 \leq k \leq l$. این را یک افراز از V می‌نامیم (به شکل ۲۱.۱—(الف) توجه شود). بنابه تعریف اگر $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$، $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ و $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$، آنگاه طول این افراز برابر است با

$$L = \min\{\Delta x_1, \cdots, \Delta x_n, \Delta y_1, \cdots, \Delta y_m, \Delta z_1, \cdots, \Delta z_l\}$$

و $N = \max\{n, m, l\}$ را عرض این فراز می‌نامیم. فرض کنیم $(x_i, y_j, z_k) \in V_{ijk}$ و $\mathrm{Vol}(V_{ijk})$ نمایشگر حجم V_{ijk} باشد، در این صورت اگر حد

$$\lim_{L \longrightarrow 0} \lim_{N \longrightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{l} f(x_i, y_j, z_k) \mathrm{Vol}(V_{ijk})$$

موجود باشد، آنگاه می‌گوئیم f بر V انتگرال‌پذیر است و مقدار این حد را انتگرال f بر V نامیده و با نماد $\iiint_V f\, dxdydz$ نشان می‌دهیم.

قضیه. اگر V بسته و کراندار و f بر V پیوسته باشد، آنگاه f بر V انتگرال‌پذیر است.

قضیه. فرض کنیم f و g دو تابع سه متغیره، a عددی حقیقی و V_1 و V_2 دو زیر مجموعه از $\mathbb{R}^3$ باشند. در این صورت

۱) $\iiint_V (af + g)\, dxdydz = a \iiint_V f\, dxdydz + \iiint_V g\, dxdydz$.

۲) اگر $\mathrm{Vol}(V_1 \bigcap V_2) = \emptyset$، آنگاه
$$\iiint_{V_1 \bigcup V_2} f\, dxdydz = \iiint_{V_1} f\, dxdydz + \iiint_{V_2} f\, dxdydz$$

۳) اگر $V_1 \subseteq V_2$ و f تابعی نامنفی باشد، آنگاه $\iiint_{V_1} f\, dxdydz \leq \iiint_{V_2} f\, dxdydz$.

۴) اگر $\mathrm{Vol}(V)=0$، آنگاه $\iiint_V f\,dxdydz=0$.

۵) اگر $\mathrm{Vol}\{X\in V|f(X)\neq g(X)\}=0$، آنگاه
$$\iiint_V f\,dxdydz=\iiint_V g\,dxdydz$$

۶) اگر $\forall X\in V\ :\ f(X)\leq g(X)$، آنگاه $\iiint_V f\,dxdydz\leq\iiint_V g\,dxdydz$.

۷) اگر $M=\max\{f(X)|X\in V\}$ و $m=\min\{f(X)|X\in V\}$، آنگاه
$$m\times\mathrm{Vol}(V)\leq\iiint_V f\,dxdydz\leq M\times\mathrm{Vol}(V)$$

۸) داریم $\left|\iiint_V f\,dxdydz\right|\leq\iiint_V |f|\,dxdydz$.

۲.۷.۱ مجموعه $z-$ مناسب و انتگرال مکرر.

زیر مجموعه V از $\mathbb{R}^3$ را در صورتی $z-$ مناسب گوئیم که آنرا بصورت زیر بتوان نوشت

$$V=\big\{(x,y,z)\,|\,(x,y)\in D,\ h(x,y)\leq z\leq l(x,y)\big\}\tag{۷.۱}$$

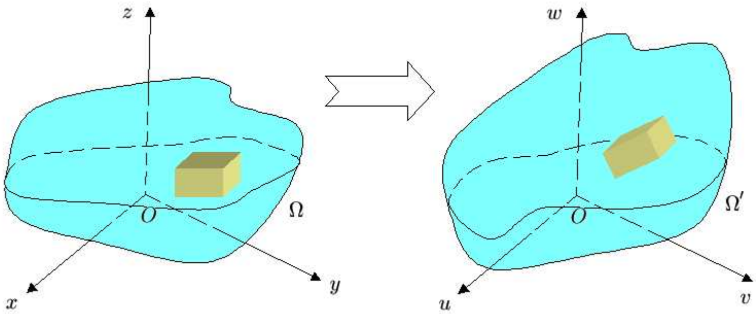
مفهوم مجموعهٔ $x-$ مناسب و یا $y-$ مناسب بصورت مشابه قابل تعریف است (شکل ۲۱.۱—(ب)).

قضیه. اگر V مجموعه‌ای $z-$ مناسب باشد و بصورت (۷.۱) قابل بیان باشد و f بر V پیوسته باشد،آنگاه

$$\iiint\limits_V f\,dxdydz=\iint\limits_D\left[\int_{h(x,y)}^{l(x,y)}f(x,y,z)dz\right]dydx$$

نتیجه. اگر بتوان نوشت $f(x,y,z)=g(x)h(y)k(z)$ و نیز اگر V ناحیه‌ای مستطیل شکل باشد، $V=\big\{(x,y,z)\,|\,a\leq x\leq b,c\leq y\leq d,m\leq z\leq n\big\}$، آنگاه

$$\iiint\limits_V f\,dxdydz=\left[\int_a^b g(x)\,dx\right]\times\left[\int_c^d h(y)dy\right]\times\left[\int_m^n k(z)dz\right]$$



شکل ۲۲.۱: تغییر متغیر در انتگرال سه‌گانه

۳.۷.۱ تغییر متغیر.

بسیاری از مسایل دشوار انتگرال سه گانه به کمک تغییر متغیر به مسایل ساده‌تر تبدیل می‌گردند.

قضیه تغییر متغیر. فرض کنیم $\Omega' \subseteq Ouvw$ و $x = X(u,v,w)$، $y = Y(u,v,w)$ و $z = Z(u,v,w)$ توابعی مشتق‌پذیر بر Ω' هستند. فرض کنیم نگاشت

$$(u,v,w) \mapsto (X(u,v,w), Y(u,v,w), Z(u,v,w))$$

بر Ω' یکبیک است و $V \subseteq Oxyz$ تصویر Ω' تحت تأثیر این نگاشت است و $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ بر Ω' مخالف صفر است. در این صورت

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz =$$
$$= \iiint\limits_{\Omega'} f\Big(X(u,v,w), Y(u,v,w), Z(u,v,w)\Big) \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw$$

تعریف. اگر یکی و یا همهٔ شرایط آمده در صورت قضیه بالا در مورد زیر مجموعه‌ای با حجم صفر از Ω' برقرار نباشد، هنوز هم حکم این قضیه صادق است (به شکل ۲۲.۱ توجه شود).

تغییر مختصات خطی، استوانه‌ای و کروی از مهمترین تغییر مختصات در انتگرال سه‌گانه می‌باشند.

تغییر مختصات خطی. در اینجا فرض می‌شود که $x = a_1u + b_1v + c_1w + d_1$، $y = a_2u + b_2v + c_2w + d_2$ و $z = a_3u + b_3v + c_3w + d_3$ که a_i، b_i و c_i اعداد

ثابت هستند. در نتیجه،

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \det \begin{bmatrix} a_۱ & b_۱ & c_۱ \\ a_۲ & b_۲ & c_۲ \\ a_۳ & b_۳ & c_۳ \end{bmatrix}$$

حسن این تغییر متغیر در آن است که تصویر هر خط، یک خط و تصویر هر صفحه، یک صفحه می‌شود.بنابراین، برای تصویر نمودن مثلاً یک هرم کافی است که وجوه آن را تصویر کنیم و یا اینکه ابتدا رئوس هرم را تصویر کرده و سپس از نقط به دست آمده صفحات مناسبی را عبور بدهیم.

نتیجه ۱. اگر ناحیه V نسبت به x متقارن باشد (با تغییر x به $-x$ ناحیه V تغییر نکند) و تابع f نسبت به x فرد باشد (با تغییر x به $-x$ علامت f عوض شود)، آنگاه انتگرال f بر V برابر صفر است. برای اثبات این مطلب، کافی است از تغییر متغیر $z = w$، $v = y$، $u = -x$ استفاده کنیم.

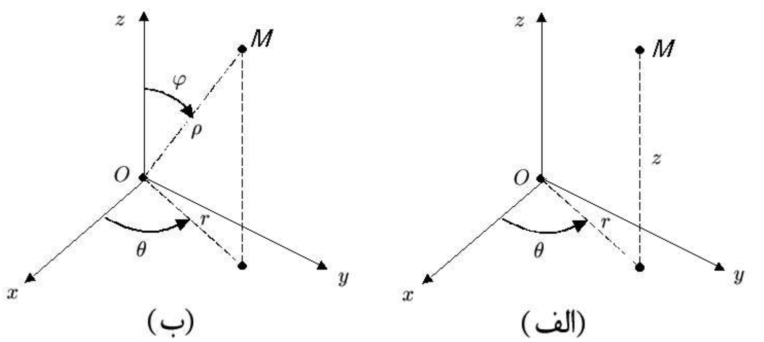
نتیجه ۲. اگر ناحیه V نسبت به y متقارن باشد (با تغییر y به $-y$ ناحیه V تغییر نکند) و تابع f نسبت به y فرد باشد (با تغییر y به $-y$ علامت f عوض شود)، آنگاه انتگرال f بر V برابر صفر است. برای اثبات این مطلب، کافی است از تغییر متغیر $z = w$، $v = -y$، $u = x$ استفاده کنیم.

نتیجه ۳. اگر ناحیه V نسبت به z متقارن باشد (با تغییر z به $-z$ ناحیه V تغییر نکند) و تابع f نسبت به z فرد باشد (با تغییر z به $-z$ علامت f عوض شود)، آنگاه انتگرال f بر V برابر صفر است. برای اثبات این مطلب، کافی است از تغییر متغیر $-z = w$، $v = y$، $u = x$ استفاده کنیم.

تغییر مختصات استوانه‌ای. در اینجا فرض می‌شود که $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ که $r = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ فاصله نقطهٔ (x,y,z) از مبدأ است و $\theta = \mathrm{Arctan}(y/x)$ زاویه میان بردار واصل میان مبداء و نقطهٔ (x,y,z) و بردار $\mathbf{i}$ (یعنی راستای محور x ها) است. در نتیجه،

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \det \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & ۰ \\ \sin\theta & r\cos\theta & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = r$$

حسن این تغییر در آن است که تصویر هر ناحیه استوانه‌ای شکل، ناحیه‌ای مستطیل شکل می‌شود. بنابراین اگر در مسأله‌ای عبارت $x^۲ + y^۲$ ظاهر شود، استفاده از این تغییر مختصات ممکن است مفید باشد (به شکل ۲۳.۱–(الف) توجه شود).



شکل ۲۳.۱: (الف) مختصات استوانه‌ای (ب) مختصات کروی

تغییر مختصات کروی. در اینجا فرض می‌شود که

$$x=\rho\cos\theta\sin\varphi \quad , \qquad y=\rho\sin\theta\sin\varphi \quad , \qquad z=\rho\cos\varphi$$

که $\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ فاصله نقطهٔ (x,y,z) از مبداء است، $\theta=\mathrm{Arctan}(y/x)$ زاویه میان بردار واصل میان مبداء و نقطهٔ $(x,y,0)$ و بردار i (یعنی راستای محور x ها) است و ρ زاویه میان بردار واصل میان مبداء و نقطهٔ $(x,y,0)$ و محور Oz است. در نتیجه

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}=\det\begin{bmatrix}\cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\varphi\\ -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\theta & 0\\ \rho\cos\theta\cos\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi & -\rho\sin\varphi\end{bmatrix}=\rho^2\sin\phi$$

حسن این تغییر در آن است که تصویر هر ناحیه کروی شکل، ناحیه‌ای مستطیل شکل می‌شود. بنابراین اگر در مسألهای عبارت $x^2+y^2+z^2$ ظاهر شود، استفاده از این تغییر مختصات ممکن است مفید باشد (به شکل ۲۳.۱—(ب) توجه شود).

۴.۷.۱ کاربردها. انتگرال سه گانه کاربردهای فراوانی در ریاضیات، فیزیک و مهندسی دارد. از عمومی‌ترین کاربردهای آن عبارتند از:

کاربرد در محاسبه حجم ناحیه سه بعدی. اگر V ناحیه‌ای محدود در فضا باشد، آنگاه حجم آن برابر $\mathrm{Vol}(V) = \iiint_V ۱\, dxdydz$ است.

کاربرد در محاسبه جرم جسم سه بعدی. اگر نقطهٔ به مختصات (x, y, z) از جسم سه بعدی V دارای چگالی جرم $\delta(x, y, z)$ باشد، آنگاه جرم V برابر است با

$$m(V) = \iiint\limits_V \delta(x, y, z)\, dxdydz$$

کاربرد در محاسبه مرکز ثقل جسم سه بعدی. اگر نقطهٔ به مختصات (x, y, z) از جسم سه بعدی V دارای چگالی جرم $\delta(x, y, z)$ باشد و $C = (a, b, c)$ مرکز ثقل آن باشد، آنگاه $a = \frac{۱}{m}\iiint_V x\delta(x, y, z)\, dxdydz$ و

$$b = \frac{۱}{m} \iiint\limits_V y\delta(x, y, z)\, dxdydz \quad , \quad c = \frac{۱}{m} \iiint\limits_V z\delta(x, y, z)\, dxdydz\ .$$

که در اینجا m جرم V است.

کاربرد در محاسبه گشتاور جسم سه بعدی حول یک صفحه. اگر نقطهٔ به مختصات (x, y, z) از جسم سه بعدی V دارای چگالی جرم $\delta(x, y, z)$ باشد و P صفحهٔ به معادلهٔ $ax + by + cz + d = ۰$ باشد، آنگاه گشتاور V حول صفحه P برابر است با

$$M_P(V) = \iiint\limits_V \frac{ax + by + cz + d}{\sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲}}\delta(x, y, z)\, dxdydz$$

سه حالت خاص آن عبارتند از

$$M_{yz}(V) = \iiint\limits_V x\delta(x, y, z)\, dxdydz \qquad \text{گشتاور حول صفحه } Oyz$$

$$M_{xz}(V) = \iiint\limits_V y\delta(x, y, z)\, dxdydz \qquad \text{گشتاور حول صفحه } Oxz$$

$$M_{xy}(V) = \iiint\limits_V z\delta(x, y, z)\, dxdydz \qquad \text{گشتاور حول صفحه } Oxy$$

کاربرد در محاسبه گشتاور جسم سه بعدی حول یک خط. اگر نقطهٔ به مختصات (x, y, z) از جسم سه بعدی V دارای چگالی جرم $\delta(x, y, z)$ باشد و ℓ خط مفروضی

در فضا باشد، آنگاه گشتاور V حول خط ℓ برابر است با

$$M_x(V) = \iiint\limits_V \sqrt{y^۲ + z^۲}\delta(x,y,z)\,dxdydz \qquad \text{حول محور } Ox$$

$$M_y(V) = \iiint\limits_V \sqrt{x^۲ + z^۲}\delta(x,y,z)\,dxdydz \qquad \text{حول محور } Oy$$

$$M_z(V) = \iiint\limits_V \sqrt{x^۲ + y^۲}\delta(x,y,z)\,dxdydz \qquad \text{حول محور } Oz$$

کاربرد در محاسبه گشتاور جسم سه بعدی حول یک نقطه. اگر نقطهٔ به مختصات (x,y,z) از جسم سه بعدی V دارای چگالی جرم $\delta(x,y,z)$ باشد و $X_\circ = (x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ نقطه‌ای دلخواه باشد، آنگاه گشتاور V حول $X_\circ$ برابر است با

$$I_{X_\circ}(V) = \iiint\limits_V \sqrt{(x-x_\circ)^۲ + (y-y_\circ)^۲ + (z-z_\circ)^۲}\delta(x,y,z)\,dxdydz$$

یک حالت خاص عبارت است از

$$M_\circ(V) = \iiint\limits_V \sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}\delta(x,y,z)\,dxdydz \qquad \text{حول مبدأ}$$

کاربرد در محاسبه گشتاور ماند جسم سه بعدی حول یک صفحه. اگر نقطهٔ به مختصات (x,y,z) از جسم سه بعدی V دارای چگالی جرم $\delta(x,y,z)$ باشد و P صفحه به معادلهٔ $ax + by + cz + d = \circ$، آنگاه گشتاور ماند V حول صفحه P برابر است با

$$I_P(V) = \iiint\limits_V \frac{(ax+by+cz+d)^۲}{a^۲ + b^۲ + c^۲}\delta(x,y,z)\,dxdydz$$

سه حالت خاص آن عبارتند از

$$I_{yz}(V) = \iiint\limits_V x^۲\delta(x,y,z)\,dxdydz \qquad \text{حول صفحه } Oyz$$

$$I_{xz}(V) = \iiint\limits_V y^۲\delta(x,y,z)\,dxdydz \qquad \text{حول صفحه } Oxz$$

$$I_{xy}(V) = \iiint\limits_V z^۲\delta(x,y,z)\,dxdydz \qquad \text{حول صفحه } Oxy$$

کاربرد در محاسبه گشتاور ماند جسم سه بعدی حول یک خط. اگر نقطهٔ به مختصات (x,y,z) از جسم سه بعدی V دارای چگالی جرم $\delta(x,y,z)$ باشد و ℓ خط مفروضی در فضا باشد، آنگاه گشتاور ماند V حول خط ℓ برابر است با

$$I_\ell(V)=\iiint\limits_V h^{۲}(x,y,z)\delta(x,y,z)\,dxdydz$$

که $h(x,y,z)$ فاصله نقطهٔ (x,y,z) تا خط ℓ است. سه حالت خاص آن عبارتند از

$$I_x(V)=\iiint\limits_V (y^{۲}+x^{۲})\delta(x,y,z)\,dxdydz \qquad \text{حول محور}\ Ox$$

$$I_x(V)=\iiint\limits_V (x^{۲}+z^{۲})\delta(x,y,z)\,dxdydz \qquad \text{حول محور}\ Oy$$

$$I_z(V)=\iiint\limits_V (x^{۲}+y^{۲})\delta(x,y,z)\,dxdydz \qquad \text{حول محور}\ Oz$$

کاربرد در محاسبه گشتاور ماند جسم سه بعدی حول یک نقطه. اگر نقطهٔ به مختصات (x,y,z) از جسم سه بعدی V دارای چگالی جرم $\delta(x,y,z)$ باشد و $X_\circ=(x_\circ,y_\circ,z_\circ)$ نقطه‌ای دلخواه باشد، آنگاه گشتاور ماند V حول $X_\circ$ برابر است با

$$\iiint\limits_V \{(x-x_\circ)^{۲}+(y-y_\circ)^{۲}+(z-z_\circ)^{۲}\}\delta(x,y,z)\,dxdydz$$

یک حالت خاص آن عبارت است از

$$I_O(V)=\iiint\limits_V \{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}\}\delta(x,y,z)\,dxdydz \qquad \text{حول مبدأ}$$

۸.۱ انتگرال خط

۱.۸.۱ میدان برداری و اسکالری. در اصطلاح علم فیزیک، توابع به شکل: $f:\mathbb{R}^{۳}\to\mathbb{R}$ را میدان اسکالر و توابع به شکل $\mathbf{F}:\mathbb{R}^{۳}\to\mathbb{R}^{۳}$ را میدان برداری

می‌نامند. هر میدان برداری را بر حسب مؤلفه‌هایش می‌توان بیان کرد:

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \overrightarrow{(f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z))}$$

توابع چند متغیرهٔ f_1، f_2 و f_3 را توابع مؤلفه‌ای $\mathbf{F}$ می‌نامیم.

فرض کنیم P خاصیتی در مورد توابع چند متغیره (میدان‌های اسکالر) نظیر پیوستگی یا مشتق پذیری باشد، در صورتی می‌گوئیم میدان برداری $\mathbf{F}$ دارای خاصیت P است که تمام توابع مؤلفه‌ای آن دارای خاصیت P باشند.

۲.۸.۱ انتگرال خط نوع اول در صفحه.

فرض کنیم

$$C : \mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(x(t), y(t))}\ ;\ a \le t \le b$$

یک منحنی هموار جهتدار در صفحه و $f(x,y)$ میدانی اسکالر در صفحه باشد که بر یک همسایگی باز شامل منحنی C پیوسته است (به شکل ۲۴.۱–(الف) توجه شود). در این صورت انتگرال خط f بر C را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\int_C f\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

قضیه. ۱) مقدار انتگرال خط $\int_C f ds$ به چگونگی پارامتره کردن منحنی C بستگی ندارد، یعنی ممکن است ضابطه r تغییر کند ولی تأثیری بر مقدار انتگرال خط نگذارد.

۲) $\displaystyle\int_{-C} f\, ds = \int_C f\, ds$

۳) $\displaystyle\int_{(C_1+C_2)} f\, ds = \int_{C_1} f\, ds + \int_{C_2} f\, ds$

۴) $\displaystyle\int_C af\, ds = a\int_C f\, ds$

۵) $\displaystyle\int_C (f_1 + f_2)\, ds = \int_C f_1\, ds + \int_C f_2\, ds$

۶) $\displaystyle\left|\int_C f\, ds\right| \le \max\{|f(X)|\ |X \in C\} \times (\text{طول قوس منحنی } C)$

کاربرد در فیزیک. اگر C میله‌ای واقع در صفحه باشد و میدان اسکالر f بر ناحیه‌ای باز و شامل C پیوسته باشد، آنگاه ظرفیت کل این میله برابر انتگرال خط f بر C است.

مثلاً، اگر نقطهٔ به مختصات (x,y) از میلهٔ مادی C دارای چگالی جرم $\delta(x,y)$ باشد، آنگاه جرم C برابر $m=\int_C \delta(x,y)\,ds$ است و مرکز ثقل آن برابر $C=(a,b)$ است که در آن

$$a=\frac{۱}{m}\int_C x\;\delta(x,y)\,ds \quad , \quad b=\frac{۱}{m}\int_C y\;\delta(x,y)\,ds$$

۳.۸.۱ انتگرال خط نوع اول در فضا. فرض کنیم

$$C:\mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(x(t),y(t),z(t))}\;;\;a\leq t\leq b$$

یک منحنی هموار جهتدار در فضا و $f(x,y,z)$ میدانی اسکالر در فضا باشد که بر یک همسایگی باز شامل منحنی C پیوسته است (به شکل ۲۴.۱—(الف) توجه شود). در این صورت انتگرال خط f بر C را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\int_C f\,ds=\int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^{۲}+(y'(t))^{۲}+(z'(t))^{۲}}\,dt$$

قضیه. ۱) مقدار انتگرال خط $\int_C f\,ds$ به چگونگی پارامتره کردن منحنی C بستگی ندارد، یعنی ممکن است ضابطه $\mathbf{r}$ تغییر کند ولی تأثیری بر مقدار انتگرال خط نگذارد.

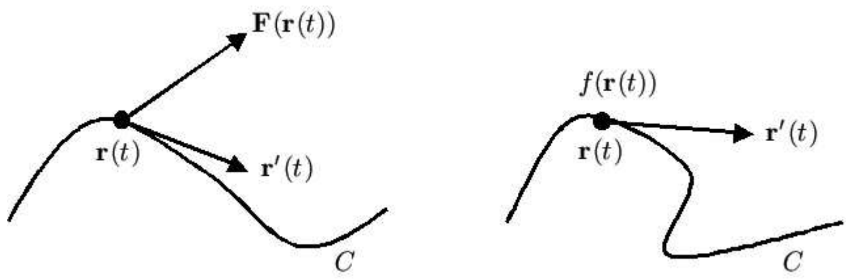
$$۲)\;\int_{-C} f\,ds=\int_C f\,ds \qquad ۳)\;\int_{(C_۱+C_۲)} f\,ds=\int_{C_۱} f\,ds+\int_{C_۲} f\,ds$$

$$۴)\;\int_C af\,ds=a\int_C f\,ds \qquad ۵)\;\int_C (f_۱+f_۲)\,ds=\int_C f_۱\,ds+\int_C f_۲\,ds$$

$$٦)\;\left|\int_C f\,ds\right|\leq \max\{|f(X)|\;|X\in C\}\times(\text{طول قوس منحنی } C)$$

کاربرد در فیزیک. اگر C میله‌ای واقع در فضا بوده و میدان اسکالر f بر ناحیه‌ای باز و شامل C پیوسته باشد، آنگاه ظرفیت کل این میله برابر انتگرال خط f بر C است. مثلاً، اگر نقطهٔ به مختصات (x,y,z) از میلهٔ مادی C دارای چگالی جرم $\delta(x,y,z)$ باشد، آنگاه جرم C برابر $m=\int_C \delta(x,y,z)\,ds$ است و مرکز ثقل آن برابر است با $C=(a,b,c)$ که در آن

$$a=\frac{۱}{m}\int_C x\;\delta\,ds,\quad b=\frac{۱}{m}\int_C y\;\delta\,ds,\quad c=\frac{۱}{m}\int_C z\delta\,ds$$



(ب)   (الف)

شکل ۲۴.۱: تعریف انتگرال خط

۴.۸.۱ انتگرال خط نوع دوم در صفحه.

فرض کنیم یک منحنی جهتدار در صفحه مانند $C\ :\ \mathbf{r}(t)\ =\ \overrightarrow{(x(t),\ \ y(t))}\ ;\ a\ \leq t\leq b$ داده شده باشد و همچنین $\mathbf{F}(x,y)\ =\ \overrightarrow{(P(x,y),Q(x,y))}$ میدانی برداری در صفحه باشد که بر یک همسایگی باز شامل منحنی C پیوسته است (به شکل ۲۴.۱—(ب) توجه شود). در این صورت انتگرال $\mathbf{F}$ بر C را به شکل $\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\ \bullet\ \mathbf{r}'(t)\,dt$ تعریف می‌کنیم، و یا

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \int_a^b \{P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\}\,dt$$

قضیه. ۱) مقدار انتگرال خط $\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ به چگونگی پارامتره کردن منحنی C بستگی ندارد، یعنی ممکن است ضابطه $\mathbf{r}$ تغییر کند ولی تأثیری بر مقدار انتگرال خط نگذارد.

۲) $\displaystyle\int_{-C} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = -\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ ۳) $\displaystyle\int_{(C_۱+C_۲)} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{C_۱} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} + \int_{C_۲} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$

۴) $\displaystyle\int_C a\mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = a\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ ۵) $\displaystyle\int_C (\mathbf{F}_۱ + \mathbf{F}_۲) \bullet d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}_۱ \bullet d\mathbf{r} + \int_C \mathbf{F}_۲ \bullet d\mathbf{r}$

۶) $\displaystyle\left|\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}\right| \leq \max\{\|\mathbf{F}(X)\|\ \ |X\in C\} \times$ (طول قوس منحنی C)

کاربرد در فیزیک. اگر C مسیر حرکت یک متحرک در ناحیه‌ای از صفحه باشد که تحت تأثیر میدان برداری $\mathbf{F}$ است، آنگاه کار انجام شده توسط این متحرک برابر است

با انتگرال خط $\mathbf{F}$ بر C.

میدان ابقائی. فرض کنیم $\mathbf{F}(x,y) = \overrightarrow{(P(x,y),Q(x,y))}$ میدانی برداری باشد که بر ناحیهٔ بسته، کراندار و همبند ساده V مشتق‌پذیر است. در این صورت احکام زیر معادل هستند:

۱) انتگرال خط $\int_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$ بر V **مستقل از مسیر** است؛ یعنی تنها به دو انتهاء منحنی C بستگی دارد. به بیان دیگر، اگر $C_۱, C_۲ \subseteq V$ دو منحنی با ابتداء و انتهاء برابر باشند، آنگاه $\int_{C_۱} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$ و $\int_{C_۲} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$ برابرند (به شکل ۲۵.۱—(الف) توجه شود).

۲) انتگرال خط $\int_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$ بر هر **منحنی بستهٔ** در V برابر صفر است (به شکل ۲۵.۱—(ب) توجه شود).

۳) میدان برداری $\mathbf{F}$ بر V **ابقائی** است، به این معنی که تابع $f(x,y)$ طوری یافت می‌گردد که اگر $C \subseteq V$ منحنی با ابتدأ A و انتهأ B باشد، آنگاه

$$\int_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = f(B) - f(A)$$

در این صورت، f را **تابع پتانسیل $\mathbf{F}$ بر مجموعه** V می‌نامیم.

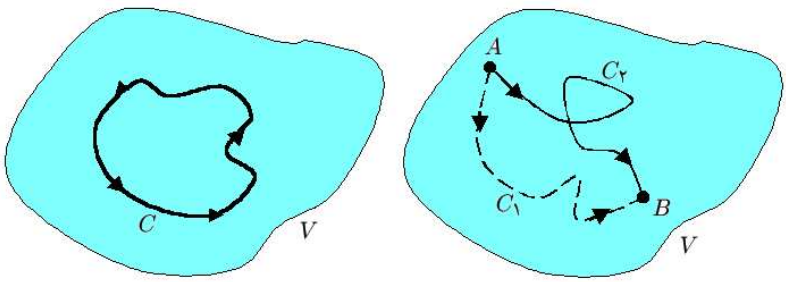
۴) عبارت دیفرانسیلی $\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = Pdx + Qdy$ بر مجموعه V **کامل** است، به این معنی که تابع $f(x,y)$ طوری یافت می‌گردد که بر V داریم $df = \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$ و یا به بیان معادل $\frac{\partial f}{\partial x} = P$ و $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$.

۵) **دیفرانسیل خارجی** عبارت دیفرانسیلی $\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = Pdx + Qdy$، بر مجموعه V برابر صفر است، به این معنی که بر V داریم $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ مشروط به اینکه مشتقات مذکور پیوسته باشند.

۵.۸.۱ انتگرال خط نوع دوم در فضا.

فرض کنیم یک منحنی هموار جهتدار در فضا $C : \mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(x(t),y(t),z(t))}\,;\, a \leq t \leq b$ داده شده باشد و همچنین میدان برداری $\mathbf{F}(x,y,z) = \overrightarrow{(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))}$ در فضا که بر یک همسایگی باز شامل C پیوسته است در اختیار باشد (به شکل ۲۴.۱—(ب) توجه شود). در این صورت **انتگرال خط** $\mathbf{F}$ بر C را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\int_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\bullet \mathbf{r}'(t)\,dt$$



(ب) (الف)

شکل ۲۵.۱: میدان ابقائی

و یا به بیان دیگر، داریم

$$\int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_a^b \Big\{P(x(t), y(t), z(t))\,x'(t) \\ + Q(x(t), y(t), z(t))\,y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))\,z'(t)\Big\}\,dt$$

قضیه. ۱) مقدار انتگرال خط $\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ به چگونگی پارامتره کردن منحنی C بستگی ندارد، یعنی ممکن است ضابطه r تغییر کند ولی تأثیری بر مقدار انتگرال خط نگذارد.

۲) $\displaystyle\int_{-C} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = -\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ ۳) $\displaystyle\int_{(C_1+C_2)} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$

۴) $\displaystyle\int_C a\mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = a\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ ۵) $\displaystyle\int_C (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) \bullet d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}_1 \bullet d\mathbf{r} + \int_C \mathbf{F}_2 \bullet d\mathbf{r}$

۶) $\displaystyle\left|\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}\right| \leq \max\{\|\mathbf{F}(X)\| \mid X \in C\} \times$ (طول قوس منحنی C)

کاربرد در فیزیک. اگر C مسیر حرکت یک متحرک در ناحیه‌ای از فضا باشد که تحت تأثیر میدان برداری $\mathbf{F}$ است، آنگاه کار انجام شده توسط این متحرک برابر است با انتگرال خط $\mathbf{F}$ بر C.

میدان ابقائی. فرض کنیم $\mathbf{F}(x, y, z) = \overrightarrow{(P(x, y, z) \bullet Q(x, y, z), R(x, y, z))}$ میدانی برداری باشد که بر ناحیهٔ بسته، کراندار و همبند ساده V مشتق‌پذیر است. در این صورت احکام زیر معادل هستند:

۱) انتگرال خط $\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ بر V تنها به دو انتهاء منحنی C بستگی دارد. به بیان دیگر، اگر $C_2 \subseteq V$ و C_1 دو منحنی با ابتداء و انتهاء برابر باشند آنگاه $\int_{C_1} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ و $\int_{C_2} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ برابرند (به شکل ۲۵.۱—(الف) توجه شود).

۲) انتگرال خط $\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ بر هر منحنی بستهٔ در V برابر صفر است (به شکل ۲۵.۱—(ب) توجه شود).

۳) میدان برداری $\mathbf{F}$ بر V ابقائی است، به این معنی که تابع $f(x,y,z)$ طوری یافت می‌گردد که اگر $C \subseteq V$ منحنی با ابتداء A و انتهاء B باشد، آنگاه

$$\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = f(B) - f(A)$$

در این صورت، f را تابع پتانسیل $\mathbf{F}$ بر مجموعه V می‌نامیم.

۴) عبارت دیفرانسیلی $\mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = Pdx + Qdy + Rdz$ بر مجموعه V کامل است، به این معنی که تابع $f(x,y,z)$ طوری یافت می‌گردد که بر V داریم $df = \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ و یا به بیان معادل $\frac{\partial f}{\partial x} = P$، $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$ و $\frac{\partial f}{\partial z} = R$.

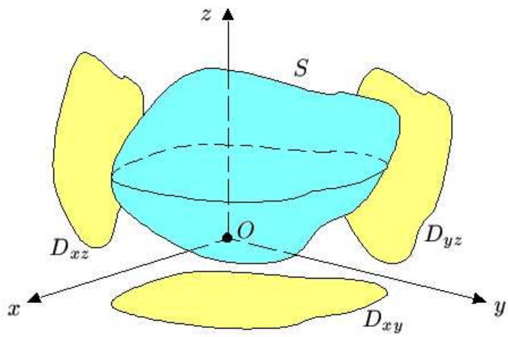
۵) دیفرانسیل خارجی عبارت دیفرانسیلی $\mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = Pdx+Qdy+Rdz$، بر مجموعه V برابر صفر است، به این معنی که بر V داریم $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$، $\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$ و $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$. مشروط به اینکه مشتقات مذکور پیوسته باشند.

۹.۱ انتگرال سطح

اگر در انتگرال دوگانه بجای زیر مجموعه‌ای از صفحه، قسمتی از یک رویهٔ منحنی‌الخط استفاده شود، انتگرال سطح نوع اول حاصل خواهد شد. اگر انتگرال خط را تعمیم دهیم، به این معنی که اشیاء زمینه‌ای آن را از موجودات یک بعدی (منحنی) به موجودات دو بعدی (رویه) گسترش دهیم، مفهوم انتگرال سطح نوع دوم حاصل خواهد شد.

۱.۹.۱ رویه. اشیاء دو بعدی در فضا را رویه می‌نامند. به بیان دقیق‌تر،

تعریف. فرض کنیم f تابعی مشتق‌پذیر باشد، **رویه (یا سطح)** به معادلهٔ $f = 0$ عبارت است از مجموعه همه نقاطی از فضا که در رابطه $f(x,y,z) = 0$ صدق می‌کنند. در



شکل ۲۶.۱: تصویر رویه بر صفحات مختصاتی

این حالت می‌نویسیم: $S : f(x,y,z) = ۰$. رویه S را در صورتی **منظم** گوئیم که بازاء هر $X \in S$ ای داشته باشیم $\nabla f(X) \neq \mathbf{0}$.

نکته. چون در این کتاب تنها مسألهٔ انتگرالگیری بر رویه‌ها مورد نظر است، شرط منظم بودن می‌تواند بر یک زیر مجموعه با مساحت صفر از رویه برقرار نباشد.

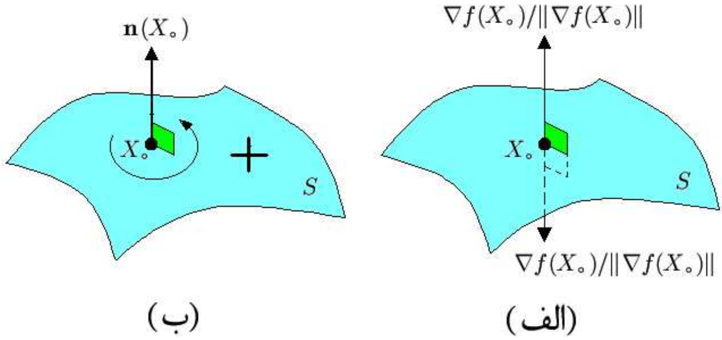
نکته. در برخی از موارد با درج یک یا چند نامساوی و یا قید کردن اینکه باید نقاط رویه در مجموعه‌ای مفروض واقع باشند، رویه‌هایی با ابعاد مناسب تهیه می‌کنند: $S : f(x,y,z) = ۰ \ ; \ (x,y,z) \in V$.

قضیهٔ تابع ضمنی. فرض کنیم $S : f(x,y,z) = ۰$ رویه‌ای منظم بوده و $X_۰$ نقطه‌ای دلخواه از آن باشد. در این صورت

۱) اگر $f_z(X_۰) \neq \mathbf{0}$، آنگاه یک مجموعهٔ باز U شامل $X_۰$ طوری یافت می‌گردد که $S \cap U$ را به صورت نمودار تابع $z = Z(x,y)$ بر مجموعه $D \subseteq Oxy$ می‌توان بیان کرد: $S \cap U = \{(x,y,Z(x,y)) | (x,y) \in D\}$. در این حالت اصطلاحاً گفته می‌شود که به منظور پارامتره کردن رویه S، آنرا بر صفحه Oxy تصویر کرده‌ایم.

۲) اگر $f_y(X_۰) \neq \mathbf{0}$، آنگاه یک مجموعهٔ باز U شامل $X_۰$ طوری یافت می‌گردد که $S \cap U$ را به صورت نمودار تابع $y = Y(x,z)$ بر مجموعه $D \subseteq Oxz$ می‌توان بیان کرد: $S \cap U = \{(x, Y(x,z) z) | (x,z) \in D\}$. در این حالت اصطلاحاً گفته می‌شود که به منظور پارامتره کردن رویه S، آنرا بر صفحه Oxz تصویر کرده‌ایم.

۳) اگر $f_x(X_۰) \neq \mathbf{0}$، آنگاه یک مجموعهٔ باز U شامل $X_۰$ طوری یافت می‌گردد که $S \cap U$ را به صورت نمودار تابع $x = X(y,z)$ بر مجموعه $D \subseteq Oyz$ می‌توان بیان



شکل ۲۷.۱: جهت بر یک رویه

کرد: $S \cap U = \{(X(y,z), y, z) | (y,z) \in D\}$. در این حالت اصطلاحاً گفته می‌شود که به منظور پارامتره کردن رویه S، آنرا بر صفحه Oyz تصویر کرده‌ایم.

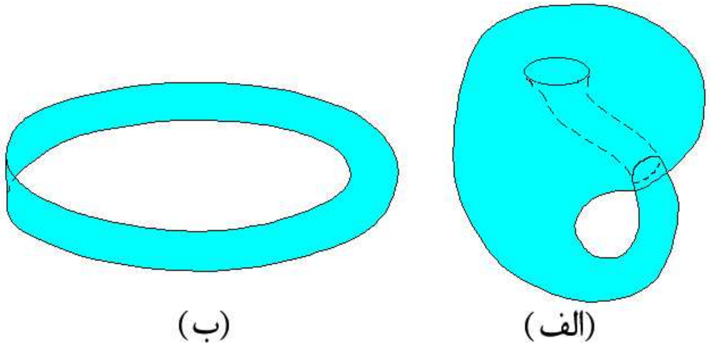
بنا به فرض منظم بودن رویه S، بازاء کلیه نقاط $X_\circ \in S$، لااقل یکی از موارد بالا برای $X_\circ$ برقرار است (به شکل ۲۶.۱ توجه شود).

جهت. بازاء هر نقطهٔ X از رویه $S : f(x,y,z)$، بردار $\nabla f(X)$ در نقطهٔ X به S عمود است. بردارهای $\mp\nabla f(X)/\|\nabla f(X)\|$ را بردارهای یکهٔ قائم (یا نرمال) بر S در نقطهٔ x می‌نامیم (به شکل ۲۷.۱—(الف) توجه شود).

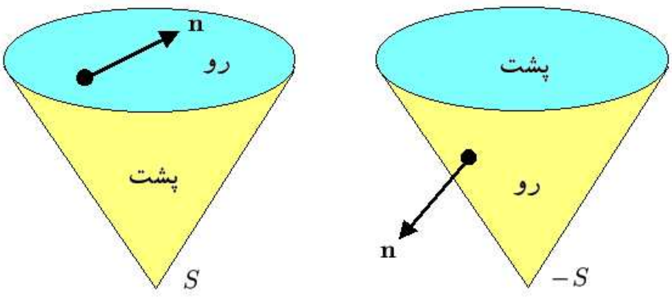
منظور از جهت در نقطهٔ X از رویه S، انتخاب یکی از این دو بردار می‌باشد. با این ترتیب در نقطهٔ X مفهوم دوران در جهت مثبت و نیز رو و پشت به صورت آمده در شکل ۲۷.۱—(ب) تعریف می‌گردد. در صورتی می‌گوئیم رویه $S : f(x,y,z) = \circ$ جهتدار است که اولاً در هر نقطهٔ $X \in S$ جهت $\mathbf{n}(X)$ انتخاب شده باشد و در ثانی میدان برداری $X \mapsto \mathbf{n}(X)$ بر یک مجموعهٔ باز شامل S پیوسته باشد. برخی از رویه‌ها مانند **نوار موبیوس** (به شکل ۲۸.۱—(ب) توجه شود) و **بطری کلاین** (شکل ۲۸.۱—(الف)) جهت ناپذیرند و برخی دیگر، مانند کره و استوانه جهت ناپذیرند.

هر رویه جهت پدیر و همبند، دقیقاً دو جهت می‌پذیرد. اگر یکی را با S نشان دهیم، دیگری را با $-S$ نشان خواهیم داد (به شکل ۲۹.۱ توجه شود).

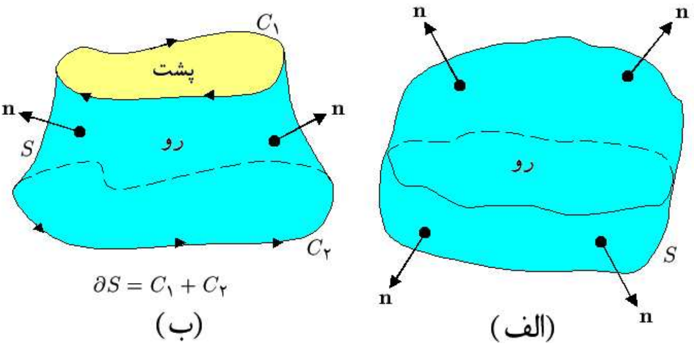
رویه بسته و رویه لبه‌دار. هر رویه جهت‌پذیر که فضا را به دو قسمت مجزا تقسیم کند، **رویه بسته** نامیده می‌شود. ثابت می‌شود یکی از این دو قسمت کراندار است و دیگری بی‌کران است. قسمت کراندار را درون S نامیده و با نماد $\mathrm{Int}(S)$ نشان می‌دهیم، قسمت



شکل ۲۸.۱: (الف) بطری کلاین (ب) نوار موبیوس



شکل ۲۹.۱: جهت بر یک رویه



شکل ۱.۳۰: جهت استاندارد

دیگر را خارج S نامیده و با نماد $\mathrm{Ext}(S)$ نشان می‌دهیم.

جهت استاندارد بر رویه بسته. جهتی است که در آن بردارهای قائم انتخابی رو به خارج S دارند (به شکل ۱.۳۰—(الف) توجه شود).

رویهٔ لبه‌دار. رویهٔ جهت‌پذیر و غیر بسته را **رویهٔ لبه‌دار** می‌نامیم. اگر رویهٔ S به صورت $S : f(x,y,z) = 0 \; ; \; (x,y,z) \in V$ مطرح شده باشد، آنگاه لبه (یا مرز) S عبارت است از فصل مشترک مرز مجموعه V با S، به علاوهٔ مجموعه کلیه نقاطی از رویه S که در آنها ∇f برابر صفر است. لبه رویه S را با نماد ∂S نشان می‌دهند. ثابت می‌شود که لبهٔ هر رویه عبارت از اجتماع یک یا چند منحنی بسته است.

فرض کنیم S یک رویه لبه‌دار و جهتدار باشد. بنابه تعریف، **جهت استاندارد** بر لبه S جهتی است که با انتخاب آن، همواره روی S سمت چپ متحرک واقع بر ∂S است (به شکل ۱.۳۰—(ب) توجه شود).

۲.۹.۱ انتگرال سطح نوع اول. فرض کنیم $S : f(x,y,z) = 0$ یک رویهٔ منظم است. بنابه قضیه تابع ضمنی، S را به صورت اجتماعی از رویه‌های به شکل زیر می‌توان نوشت:

الف) $S_{xy} : z = Z(x,y) \; ; \; (x,y) \in D_{xy}$ که در آن D_{xy} زیر مجموعه‌ای فشرده از D_{xy} است و $Z(x,y)$ بر D_{xy} مشتق پذیر است و به علاوه،
به ازای هر $(x,y) \in D_{xy}$ ای داشته باشیم $f(x,y,Z(x,y)) = 0$.

ب) $S_{xz} : y = Y(x,z) \; ; \; (x,z) \in D_{xz}$ که در آن D_{xz} زیر مجموعه‌ای فشرده از D_{xz} است و $Y(x,z)$ بر $D_{x,z}$ مشتق پذیر است و به علاوه،

به ازای هر $(x,z) \in D_{xz}$ ای داشته باشیم $f(x, Y(x,z), z) = 0$.

ج) $S_{yz} : x = X(y,z) \ ; \ (y,z) \in D_{yz}$ که در آن D_{yz} زیر مجموعه‌ای فشرده از D_{yz} است و $X(y,z)$ بر $D_{y,z}$ مشتق پذیر است و به علاوه،
به ازای هر $(y,z) \in D_{yz}$ ای داشته باشیم $f(X(y,z), y, z) = 0$.

دیفرانسیل سطح (یا دیفرانسیل مساحت). رویه S را در هر یک از موارد بالا، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$d\sigma = \frac{\|\nabla f\|}{|\frac{\partial f}{\partial z}|} dxdy = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2} dxdy, \qquad \text{(در حالت الف)}$$

$$d\sigma = \frac{\|\nabla f\|}{|\frac{\partial f}{\partial y}|} dxdz = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial z}\right)^2} dxdz, \qquad \text{(در حالت ب)}$$

$$d\sigma = \frac{\|\nabla f\|}{|\frac{\partial f}{\partial x}|} dydz = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)^2} dydz, \qquad \text{(در حالت ج)}$$

تعریف. فرض کنیم S رویه‌ای منظم است و h یک تابع چند متغیره (میدانی اسکالر) است که بر یک مجموعهٔ باز شامل S پیوسته می‌باشد. در این صورت بسته به سه حالتی که یک رویه را می‌شود بیان کرد، **انتگرال سطح (نوع اول)** h بر S را به شکل زیر می‌توانیم تعریف کنیم:

$$\iint_{(S)} h\, d\sigma = \iint_{D_{xy}} h(x,y,Z(x,y)) d\sigma \qquad \text{(در حالت الف)}$$

$$= \iint_{D_{xz}} h(x,Y(x,z),z) d\sigma \qquad \text{(در حالت ب)}$$

$$= \iint_{D_{yz}} h(X(y,z),y,z) d\sigma \qquad \text{(در حالت ج)}$$

قضیه. ۱) مقدار انتگرال سطح $\iint_{(S)} h\, d\sigma$ به چگونگی تصویر کردن رویه S بر صفحات مختصاتی بستگی ندارد.

۲) $\iint_{(-S)} h\, d\sigma = \iint_{(S)} h\, d\sigma$ ۳) $\iint_{(S_1+S_2)} h\, d\sigma = \iint_{(S_1)} h\, d\sigma + \iint_{(S_2)} h\, d\sigma$

$$۴)\ \iint\limits_{(S)} ah\,d\sigma = a\iint\limits_{(S)} h\,d\sigma \qquad ۵)\ \iint\limits_{(S)} (h_۱ + h_۲)\,d\sigma = \iint\limits_{(S)} h_۱\,d\sigma + \iint\limits_{(S)} h_۲\,d\sigma$$

$$٦)\ \left|\iint\limits_{(S)} h\,d\sigma\right| \leq \max\{|h(X)||X \in S|\} \times (S\text{مساحت})$$

۳.۹.۱ کاربردها.

کاربرد در محاسبه مساحت رویه. اگر S رویه‌ای باشد، آنگاه مساحت آن برابر $\iint_{(S)} d\sigma$ $\text{Area}(S) =$ است.

کاربرد در محاسبه جرم رویه. اگر نقطهٔ به مختصات (x,y,z) از رویه‌ای S دارای چگالی جرم $\delta(x,y,z)$ باشد، آنگاه جرم S برابر $\iint_{(S)} \delta(x,y,z)\,d\sigma$ $m(S) =$ است.

کاربرد در محاسبه مرکز ثقل رویه. اگر نقطهٔ به مختصات (x,y,z) از رویه‌ای S دارای چگالی جرم $\delta(x,y,z)$ باشد و $C = (a,b,c)$ مرکز ثقل آن باشد، آنگاه

$$a = \frac{۱}{m}\iint\limits_{(S)} x\delta\,d\delta \ ,\ \ b = \frac{۱}{m}\iint\limits_{(S)} y\delta\,d\delta \ ,\ \ c = \frac{۱}{m}\iint\limits_{(S)} z\delta\,d\delta,$$

که در اینجا m جرم S است.

کاربرد در محاسبه گشتاور رویه حول یک صفحه. اگر نقطهٔ به مختصات (x,y,z) از رویه S دارای چگالی جرم $\delta(x,y,z)$ باشد و P صفحه‌ای به معادلهٔ $ax + by + cz + d = ۰$ در فضا باشد، آنگاه گشتاور S حول P برابر است با

$$M_P(S) = \iint\limits_{(S)} \frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲}}\delta(x,y,z)\,d\sigma$$

سه حالت خاص آن عبارتند از

$$M_{xy}(S) = \iint\limits_{(S)} z\delta(x,y,z)\,d\sigma, \qquad Oxy\ \text{گشتاور حول صفحه}$$

$$M_{xz}(S) = \iint\limits_{(S)} y\delta(x,y,z)\,d\sigma, \qquad Oxz\ \text{گشتاور حول صفحه}$$

$$M_{yz}(S) = \iint\limits_{(S)} x\delta(x,y,z)\,d\sigma, \qquad Oyz\ \text{گشتاور حول صفحه}$$

کاربرد در محاسبه گشتاور رویه حول یک خط. اگر نقطهٔ به مختصات (x,y,z) از رویه S دارای چگالی جرم $\delta(x,y,z)$ باشد و ℓ خط گذرنده از نقطهٔ $X_۰$ با بردارهای v

باشد، آنگاه گشتاور S حول ℓ برابر است با

$$M_L(S)=\iint\limits_{(S)}\frac{\|(X-X_\circ)\times\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}\delta(x,y,z)\,d\sigma$$

سه حالت خاص آن عبارتند از

$$M_x(S)=\iint\limits_{(S)}\sqrt{y^۲+z^۲}\delta(x,y,z)\,d\sigma,\qquad Ox\ \text{گشتاور حول محور}$$

$$M_y(S)=\iint\limits_{(S)}\sqrt{x^۲+z^۲}\delta(x,y,z)\,d\sigma,\qquad Oy\ \text{گشتاور حول محور}$$

$$M_z(S)=\iint\limits_{(S)}\sqrt{x^۲+y^۲}\delta(x,y,z)\,d\sigma,\qquad Oz\ \text{گشتاور حول محور}$$

کاربرد در محاسبه گشتاور رویه حول یک نقطه. اگر نقطهٔ به مختصات (x,y,z) از رویه S دارای چگالی جرم $\delta(x,y,z)$ باشد و $X_\circ=(x_\circ,y_\circ,z_\circ)$ نقطهٔ دلخواه باشد، آنگاه گشتاور S حول $X_\circ$ برابر است با

$$M_{X_\circ}(S)=\iint\limits_{(S)}\sqrt{(x-x_\circ)^۲+(y-y_\circ)^۲+(z-z_\circ)^۲}\delta(x,y,z)\,d\sigma$$

یک حالت خاص آن عبارت است از

$$M_O(S)=\iint\limits_{(S)}\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}\delta(x,y,z)\,d\sigma\qquad \text{گشتاور حول مبداء}$$

کاربرد در محاسبه گشتاور ماند رویه حول یک صفحه. اگر نقطهٔ (x,y,z) از رویه S دارای چگالی جرم $\delta(x,y,z)$ باشد و P صفحه‌ای به معادلهٔ $ax+by+cz+d=\circ$ در فضا باشد، آنگاه گشتاور ماند S حول P برابر است با

$$I_P(S)=\iint\limits_{(S)}\frac{(ax+by+cz+d)^۲}{a^۲+b^۲+c^۲}\delta(x,y,z)\,d\sigma$$

سه حالت خاص آن عبارتند از

$$I_{xy}(S)=\iint\limits_{(S)}z^۲\delta(x,y,z)\,d\sigma,\qquad Oxy\ \text{گشتاور ماند حول صفحه}$$

گشتاور ماند حول صفحه Oxz $\qquad I_{xz}(S) = \iint\limits_{(S)} y^{۲}\delta(x,y,z)\,d\sigma,$

گشتاور ماند حول صفحه Oyz $\qquad I_{yz}(S) = \iint\limits_{(S)} x^{۲}\delta(x,y,z)\,d\sigma,$

کاربرد در محاسبه گشتاور ماند رویه حول یک خط. اگر نقطهٔ به مختصات (x,y,z) از رویه S دارای چگالی جرم $\delta(x,y,z)$ باشد و ℓ باشد و خط گذرنده از نقطهٔ $X_{\circ}$ با بردار هادی $\mathbf{v}$ باشد، آنگاه گشتاور ماند S حول ℓ برابر است با

$$I_L(S) = \iint\limits_{(S)} \frac{\|(X - X_{\circ}) \times \mathbf{v}\|^{۲}}{\|\mathbf{v}\|^{۲}}\delta(x,y,z)\,d\sigma$$

سه حالت خاص آن عبارتند از

گشتاور ماند حول محور Ox $\qquad I_x(S) = \iint\limits_{(S)} (y^{۲} + z^{۲})\delta(x,y,z)\,d\sigma$

گشتاور ماند حول محور Oy $\qquad I_y(S) = \iint\limits_{(S)} (x^{۲} + z^{۲})\delta(x,y,z)\,d\sigma$

گشتاور ماند حول محور Oz $\qquad I_z(S) = \iint\limits_{(S)} (x^{۲} + y^{۲})\delta(x,y,z)\,d\sigma$

کاربرد در محاسبه گشتاور ماند رویه حول یک نقطه. اگر نقطهٔ به مختصات (x,y,z) از رویه S دارای چگالی جرم $\delta(x,y,z)$ باشد و $X_{\circ} = (x_{\circ}, y_{\circ}, z_{\circ})$ نقطه‌ای دلخواه باشد، آنگاه گشتاور ماند S حول $X_{\circ}$ برابر است با

$$I_{X_{\circ}}(S) = \iint\limits_{(S)} \{(x - x_{\circ})^{۲} + (y - y_{\circ})^{۲} + (z - z_{\circ})^{۲}\}\delta(x,y,z)\,d\sigma$$

یک حالت خاص آن عبارت است از

گشتاور ماند حول مبدأ $\qquad I_O(S) = \iint\limits_{(S)} \{x^{۲} + y^{۲} + z^{۲}\}\delta(x,y,z)\,d\sigma$

۴.۹.۱ انتگرال سطح نوع دوم.

فرض کنیم S رویه‌ای منظم و $\mathbf{F}$ میدانی برداری است که بر یک مجموعهٔ باز شامل S پیوسته می‌باشد. در این صورت **انتگرال**

سطح (نوع دوم) $\mathbf{F}$ بر S را به شکل $\iint_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, d\sigma$ تعریف می‌کنیم. که در آن $\mathbf{n}$ بردار یکهٔ تعیین کنندهٔ جهت بر S است. همان طوری که ملاحظه می‌شود، این انتگرال در اساس یک انتگرال سطح نوع اول است.

قضیه. ۱) مقدار انتگرال سطح $\iint_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, d\sigma$ به چگونگی تصویر کردن رویه S بر صفحات مختصاتی بستگی ندارد.

۲) $\displaystyle\iint_{(-S)} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, d\sigma = \iint_{(S)} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, d\sigma$

۳) $\displaystyle\iint_{(S_۱+S_۲)} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, d\sigma = \iint_{(S_۱)} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n} d\sigma + \iint_{(S_۲)} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, d\sigma$

۴) $\displaystyle\iint_{(S)} (\mathbf{F}_۱ + \mathbf{F}_۲) \bullet \mathbf{n}\, d\sigma = \iint_{(S)} \mathbf{F}_۱ \bullet \mathbf{n}\, d\sigma + \iint_{(S)} \mathbf{F}_۲ \bullet \mathbf{n}\, d\sigma$

۵) $\displaystyle\iint_{(S)} a\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, d\sigma = a \iint_{(S)} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, d\sigma$

۶) $\displaystyle\left| \iint_{(S)} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, d\sigma \right| \leq \max\{|\mathbf{F}(X)|||X \in S|\} \bullet (\text{مساحت}\ S)$

کاربرد. اگر $\mathbf{F}$ میدان برداری و S یک جسم مادی دو بعدی (رویه) باشد، آنگاه شار (فلو) گذشته از S توسط $\mathbf{F}$ برابر با انتگرال $\mathbf{F}$ بر S است.

۱۰.۱ قضایای کلاسیک

در این بخش به بیان سه قضیهٔ کلاسیک می‌پردازیم که به کمک آنها می‌توان بین بخشهای دیگر ارتباط برقرار نمود. می‌توان گفت که هدف اصلی درس ریاضی عمومی ۲، رسیدن به این سه قضیه می‌باشد.

۱.۱۰.۱ قضیهٔ گرین.

قضیهٔ گرین رابطه‌ای بین انتگرال خط نوع دوم در صفحه و انتگرال دو گانه برقرار می‌سازد. قبل از بیان صورت آن به مقدمات زیر نیاز

می‌باشد.

منحنی ژردان. مجموعهٔ $C \subseteq \mathbb{R}^2$ را در صورتی تکه‌ای هموار گوئیم که به ازای تعدادی منحنی هموار مسطح $C_1, C_2, \cdots$ و C_n بتوان نوشت $C = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n$، مشروط به آنکه هر دو تا از این منحنی‌ها حداکثر در دو نقطهٔ متقاطع باشند. منحنی تکه‌ای هموار C را در صورتی بسته گوئیم که دو انتهای آن بر هم منطبق باشند.

منحنی تکه‌ای هموار C را در صورتی ساده گوئیم که خود قطعی نداشته باشد. مثلاً دایره منحنی ساده است ولی شکل نماد بینهایت ∞ ساده نیست.

منحنی مسطحه، هموار، بسته و ساده را **منحنی ژردان** می‌نامیم.

قضیهٔ منحنی ژردان. هر منحنی ژردان صفحه را به دو قسمت مجزا تقسیم می‌کند. یکی از این دو قسمت کراندار است و دیگری بی‌کران می‌باشد. قسمت کراندار را درون منحنی می‌نامیم. حاصل اجتماع درون منحنی ژردان C و خود منحنی C را با نماد $\dot{C}$ نشان داده و به آن ناحیهٔ مشخص شده توسط C می‌گوئیم. این یک زیر مجموعه بسته و کراندار است.

تعریف. فرض کنیم C یک منحنی ژردان و X_0 نقطه‌ای از $\mathbb{R}^2$ است. فرض کنیم ℓ نیم خطی با شروع از X_0 است که در هیچ نقطه‌ای به C مماس نیست. منظور از عدد برخورد ℓ با C تعداد نقاط موجود در $\ell \cap C$ است.

قضیه. فرض کنیم C یک منحنی ژردان و X_0 نقطه‌ای دلخواه است. به‌ازای هر دو نیم خط ℓ_1 و ℓ_2 با شروع از X_0، عدد برخورد ℓ_1 با C و عدد برخورد ℓ_2 با C برابر است.

شرط لازم و کافی برای اینکه X_0 به درون C متعلق باشد این است که عدد برخورد آن فرد باشد.

فرض کنیم C یک منحنی ژردان باشد، منظور از جهت استاندارد بر C جهتی است که اگر یک متحرک واقع بر C آن را انتخاب کند، آنگاه همواره درون C سمت چپ این متحرک واقع باشد (به شکل ۱.۳۱—(ب) توجه شود).

قضیهٔ گرین. فرض کنیم C یک منحنی ژردان است و $\mathbf{F} = \overrightarrow{(P, Q)}$ میدانی برداری است که بر C به طور پیوسته دیفرانسیل‌پذیر است و C دارای جهت استاندارد است. در این صورت

$$\oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_{\dot{C}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

۲.۱۰.۱ قضیهٔ گاوس.
در این بخش به بیان قضیه‌ای می‌پردازیم که به نامهای گوناگونی معروف شده است. اسامی **گاوس**، **استروگرادسکی**، **دیورژانس** و **واگرائی** معروف‌ترین آنها هستند.

تعریف. فرض کنید $\mathbf{F} = \overrightarrow{(P,Q,R)}$ میدانی برداری بوده و $\nabla := \overrightarrow{\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)}$ عملگر نابلا (یا دل) باشد. در این صورت

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) := \nabla \bullet \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

را **دیورژانس** $\mathbf{F}$ یا واگرایی $\mathbf{F}$ می‌نامیم. همچنین، میدان برداری

$$\begin{aligned} \operatorname{Curl}(\mathbf{F}) &:= \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= \overrightarrow{\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)} \end{aligned}$$

را **پیچش** یا **کرل** $\mathbf{F}$ می‌نامیم.

قضیه گاوس. فرض کنیم S یک رویه بسته با درون V و با جهت استاندارد است. همچنین فرض کنیم که $\mathbf{F} = \overrightarrow{(P,Q,R)}$ میدانی برداری است که بر V به صورت پیوسته دیفرانسیل‌پذیر است. در این صورت

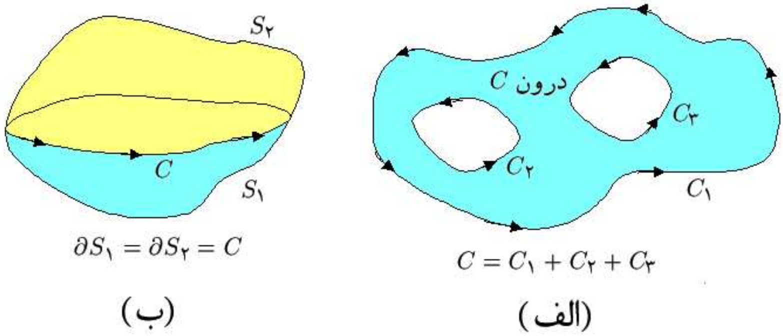
$$\iint\limits_{(S)} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint\limits_{V} \operatorname{div}(\mathbf{F})\, dV$$

نتیجه. فرض کنید $S_۱$ و $S_۲$ دو رویه‌اند و C مرز مشترک آنها است. (به شکل ۳۱.۱—(ب) توجه شود). فرض کنید $\operatorname{div}(\mathbf{F})$ بر یک همسایگی باز و همبند سادهٔ شامل $S_۱ \cup S_۲$ صفر است. در این صورت

$$\iint\limits_{(S_۱)} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, d\sigma = \iint\limits_{(S_۲)} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, d\sigma$$

۳.۱۰.۱ قضیهٔ استوکس.
قضیهٔ استوکس رابطه‌ای بین انتگرال خط نوع دوم در فضا و انتگرال سطح نوع دوم برقرار می‌سازد.

قضیه استوکس. فرض کنیم S یک رویه لبه‌دار با لبهٔ C است و جهت S و C سازگارند. همچنین فرض کنیم که $\mathbf{F} = \overrightarrow{(P,Q,R)}$ میدانی برداری است که بر S به صورت پیوسته



شکل ۳۱.۱: (الف) جهت استاندارد بر یک منحنی ژردان (ب) نتیجهٔ قضیهٔ گاوس

دیفرانسیل پذیر است (به شکل ۳۰.۱ توجه شود). در این صورت

$$\oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_{(S)} \mathrm{Curl}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{n} d\sigma$$

نتیجه ۱. اگر $\mathbf{F}(x,y,z) = \overrightarrow{(P(x,y,z), Q(x,y,z), ۰)}$ و $S \subseteq \mathbb{R}^۲$، آنگاه حکم قضیهٔ استوکس به صورت گزارهٔ مطرح شده در قضیهٔ گرین بیان خواهد شد.

نتیجه ۲. اگر $\mathrm{Curl}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$، Ω مجموعه‌ای بسته و همبند ساده باشد و $\mathbf{F}$ بر آن مجموعه به طور پیوسته مشتق پذیر باشد، آنگاه $\mathbf{F}$ بر Ω کامل است. در این حالت حکم قضیهٔ استوکس به معنی صفر بودن انتگرال $\mathbf{F}$ بر هر مسیر بسته موجود در Ω می‌باشد.

فصل ۲

مسایل حل شده

۱.۲ امتحان اول

صورت مسایل

۱) در پیوستگی یا عدم پیوستگی تابع $f(x,y)=\begin{cases}\frac{۵xy}{\sqrt{x^۲+y^۲}} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$ در مبداء مختصات بحث کنید.

۲) معادله خط مماس و صفحه قائم بر منحنی C به معادله:

$$C\ :\ x^۲-۳xy+z^۲=۱,\ \ ۲x\ \tan(xz)+۲y^۲-z=۱$$

را در نقطه $M\,(۰,۱,۱)$ بیابید.

۳) مشتق تابع $u=\dfrac{x}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}}$ را در امتداد خط مماس بر منحنی C با معادلهٔ:

$$C\ :\ x=t,\ y=۲t^۲,\ z=۲t^۴$$

در نقطه $(۱,۲,-۲)$ واقع بر منحنی بدست آورید.

۴) حاصل انتگرال دوگانه $\int_۰^۱\left[\int_{e^x}^{e}\frac{۱}{\ln y}\,dy\right]dx$ را بعد از تغییر مرتبه محاسبه کنید.

۵) به کمک تغییر متغیر در مختصات کروی حاصل انتگرال زیر را بیابید:

$$\int_{\circ}^{\text{۳}} \int_{\circ}^{\sqrt{\text{۹}-y^{\text{۲}}}} \int_{\sqrt{x^{\text{۲}}+y^{\text{۲}}}}^{\sqrt{\text{۱۸}-x^{\text{۲}}-y^{\text{۲}}}} \left(x^{\text{۲}}+y^{\text{۲}}+z^{\text{۲}}\right) dzdxdy$$

۶) درستی قضیه دیورژانس (استروگرادسکی) را برای میدان برداری $\mathbf{F} = \text{۵}z\mathbf{k}$ روی کره‌ای به مرکز مبداء مختصات و شعاع ۳ بررسی کنید.

۷) صحت قضیه استوکس را با فرض $\mathbf{F}(x,y,z) = z\mathbf{i} + \text{۴}x\mathbf{j} + \text{۲}z\mathbf{k}$ روی سطح S، که در آن S قسمتی از سطح $x^{\text{۲}} + z^{\text{۲}} = \text{۱}$ در یک هشتم اول و محدود به صفحه $y = \text{۲}$ است، بررسی کنید.

سئوالات تستی: پاسخ صحیح سئوالات تستی زیر را همراه با راه حل مشخص کنید:

۸) اگر $\omega = x^{\text{۲}} f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$، آنگاه حاصل عبارت $x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z$ برابر است با

الف) $\text{۲}\omega$، ب) $-\omega$، پ) ω، ت) $-\text{۲}\omega$ ؟

۹) دو خط $L_{\text{۱}} : \frac{x}{\text{۲}} = \frac{y+\text{۱}}{\text{۱}} = \frac{\text{۱}-z}{\text{۵}}$ و $L_{\text{۲}} : \frac{x+\text{۱}}{\text{۳}} = \frac{y}{\text{۳}} = \frac{z-\text{۳}}{\text{۴}}$

الف) در یک نقطه متقاطع هستند، ب) موازی هستند،

پ) بر هم منطبق هستند، ت) متنافر هستند.

۱۰) معادله صفحه مماس بر بیضی‌گون $x^{\text{۲}} + \text{۲}y^{\text{۲}} + z^{\text{۲}} = \text{۱}$ و موازی با صفحه $\text{۲}x - \text{۴}y + \text{۲}z = \circ$ عبارت است از:

الف) $x - \text{۲}y + z = \text{۲}$، ب) $x - \text{۲}y + z = \text{۱}$،

پ) $x - \text{۲}y + z = \text{۳}$، ت) $\text{۲}x - \text{۲}y + \text{۲}z = \text{۵}$.

حل مسایل

پاسخ مسأله ۱) خم پیوستهٔ $C_\alpha(t) = (t, \alpha t)$ واقع در صفحهٔ $\mathbb{R}^{\text{۲}}$ را در نظر می‌گیریم. روشن است که $\lim\limits_{t\to\circ} C_\alpha(t) = (\circ, \circ)$. از طرفی حد مسیری f بر مسیر C_α منتهی به

مبداء عبارت است از

$$\lim_{t\to ۰} f\left(C_\alpha(t)\right) = \lim_{t\to ۰} \frac{۵(t)\,(\alpha t)}{\sqrt{(t)^۲ + (\alpha t)^۲}} = \lim_{t\to ۰} \frac{۵\alpha t}{\sqrt{۱+\alpha^۲}} = ۰$$

پس احتمالاً f در مبداء حد دارد. برای اثبات این حدس، لازم است ثابت کنیم که

$$\forall\varepsilon\ \exists\delta\ \forall\overrightarrow{(x,y)}\ :\ \left(۰ < \|\overrightarrow{(x,y)} - \overrightarrow{(۰\,,\,۰)}\| < \delta \Longrightarrow \left|\frac{۵xy}{\sqrt{x^۲+y^۲}} - ۰\right| < \varepsilon\right)$$

برای این منظور، توجه می‌کنیم که $\|\overrightarrow{(x,y)} - \overrightarrow{(۰\,,\,۰)}\| < \delta$ معادل با این گفته است که $\sqrt{x^۲+y^۲} < \delta$ و در نتیجه $|x|$ و $|y|$ هر دو (به دلیل اینکه از $\sqrt{x^۲+y^۲}$ کوچکترند) از δ کوچکترند. در این صورت اگر $z = \max\{|y|,|x|\}$ باشد، آنگاه $z < \delta$ و در نتیجه

$$\left|\frac{۵xy}{\sqrt{x^۲+y^۲}} - ۰\right| = \frac{۵|x|\,|y|}{\sqrt{x^۲+y^۲}} \le \frac{۵zz}{\sqrt{z^۲+۰}} = ۵z < ۵\delta$$

پس کافی است δ را $\varepsilon/۵$ اختیار کنیم. بنابراین، f در مبداء پیوسته است.

پاسخ مسأله ۲) منحنی C عبارت است از مقطع دو رویهٔ

$$S_۱ : F_۱ := x^۲ - ۳xy + z^۲ = ۱\ \ ,\ \ S_۲ : F_۲ := ۲x\ \tan(xz) + ۲y^۲ - z = ۱$$

چون $\nabla F_۱(M)$ بر رویهٔ $S_۱$ در نقطهٔ M عمود است و $\nabla F_۲(M)$ نیز در نقطهٔ M بر $S_۲$ عمود است، پس $\mathbf{v} = \nabla F_۱(M) \times \nabla F_۲(M)$ بر فصل مشترک آنها، یعنی C، در نقطهٔ M مماس است. اما

$$\begin{aligned}
\nabla F_۱(M) &= \overrightarrow{(۲x-۳y, -۳x, ۲z)}\Big|_M = \overrightarrow{(-۳, ۰, ۲)},\\
\nabla F_۲(M) &= \overrightarrow{\left(۲\tan(xz) + \frac{۲xz}{\cos^۲(xz)}, ۴y, \frac{۲x^۲}{\cos^۲(xz)} - ۱\right)}\Big|_M\\
&= \overrightarrow{(۰, ۴, -۱)}
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\mathbf{v} = \nabla F_۱(M) \times \nabla F_۲(M) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -۳ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۴ & -۱ \end{vmatrix} = \overrightarrow{(-۸, -۳, -۱۲)}$$

اکنون چون صفحهٔ قائم بر C در نقطهٔ M صفحه‌ای است که از M می‌گذرد و بردار قائم آن $\mathbf{v}$ است، پس معادلهٔ آن عبارت از $۸\,(x-۰) + ۳\,(y-۱) + ۱۲\,(z-۱) = ۰$ یا

۱۵ $8x+3y+12z=15$ است. همچنین، خط مماس به C در نقطهٔ M خطی است که از M به موازات $\mathbf{v}$ می‌گذرد، بنابراین معادلهٔ آن عبارت از $\frac{z-1}{-12}=\frac{y-1}{-3}=\frac{x-0}{-8}$ یا $\frac{z-1}{12}=\frac{y-1}{3}=\frac{x}{8}$ است.

پاسخ مسأله ۳) ابتدا مماس $\mathbf{v}$ به C در نقطهٔ $M=(1,2,-2)$ را مشخص می‌کنیم. برای این منظور ابتدا باید معلوم کنیم که به ازای کدام مقادیری از t، $C(t)$ برابر M است. یعنی $\left(t,2t^2,2t^4\right)=(1,\ 2,\ -2)$ یا $t=1$. پس $\mathbf{v}$ عبارت است از

$$\mathbf{v}=C'(1)=\overrightarrow{(1,4t,8t^3)}\Big|_{t=1}=\overrightarrow{(1,4,8)}$$

در این صورت، ملاحظه می‌شود که $\nabla u|_M$ برابر است با

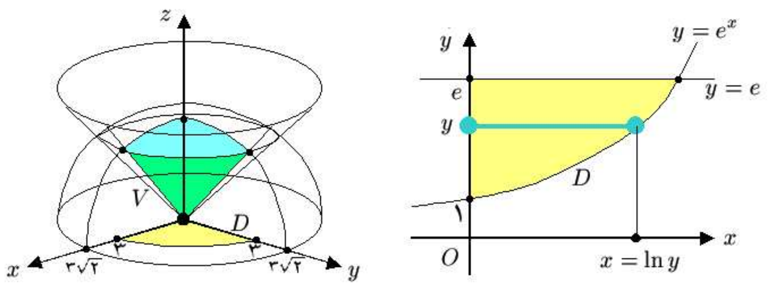
$$\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}-x\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2},\frac{-2xy}{2\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3},\right.$$
$$\left.\frac{-2xz}{2\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}\right)\Big|_M=\overrightarrow{\left(\frac{8}{27},-\frac{2}{27},\frac{2}{27}\right)}$$

و در نتیجه مشتق u در امتداد مماس به منحنی C در نقطهٔ M برابر است با

$$\begin{aligned}D_V u(M) &= \nabla u\big|_M\bullet\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\\ &= \left(\frac{8}{27}\right)\left(\frac{1}{9}\right)+\left(-\frac{2}{27}\right)\left(\frac{4}{9}\right)+\left(\frac{2}{27}\right)\left(\frac{8}{9}\right)=\frac{16}{243}\end{aligned}$$

پاسخ مسأله ۴) ابتدا ناحیهٔ مورد انتگرال، که آن را D می‌نامیم، در صفحهٔ xOy ترسیم می‌کنیم (به شکل ۱.۲—(الف) توجه شود). برای این منظور خطوط $x=0$، $x=1$، $y=e$ و منحنی $y=e^x$ را ترسیم می‌کنیم. در تعویض ترتیب حدود، مشاهده می‌شود که y بین ۱ تا e تغییر می‌کند و اگر y را بر محور y ها در نظر بگیریم، آنگاه x می‌تواند از ۰ تا $\ln y$ (چون $y=e^x$) تغییر کند. بنابراین

$$\begin{aligned}D &= \left\{(x,y)\Big|0\le x\le 1,c^x\le y\le e\right\}\\ &= \left\{(x,y)\Big|1\le y\le e,0\le x\le \ln y\right\}\end{aligned}$$



(ب) (الف)

شکل ۱.۲: (الف) مسألهٔ ۴ از امتحان اول (ب) مسألهٔ ۵ از امتحان اول

و در نتیجه

$$\begin{aligned}\int_{۰}^{۱}\left[\int_{e^x}^{e}\frac{dy}{\ln y}\right]dx &= \iint\limits_{D}\frac{dxdy}{\ln y} = \int_{۱}^{e}\left[\int_{۰}^{\ln y}\frac{dx}{\ln y}\right]dy\\ &= \int_{۱}^{e}\left[\frac{x}{\ln y}\right]_{۰}^{\ln y}dy = \int_{۱}^{e}dy = e-۱\end{aligned}$$

پاسخ مسأله ۵) ابتدا توجه می‌کنیم که ناحیهٔ مورد انتگرال عبارت است از حجم محدود میان مخروط $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ از پایین و کرهٔ $z=\sqrt{۱۸-x^۲-y^۲}$ از بالا که تصویر آن بر صفحهٔ xOy عبارت است از ناحیهٔ محدود میان خطوط $y=۰$، $y=۳$، $x=۰$ و منحنی $x=\sqrt{۹-y^۲}$ (به شکل ۱.۲—(ب) توجه شود.) یعنی

$$\begin{aligned}V &= \left\{(x,y,z)\,\middle|\,(x,y)\in D\,,\ \sqrt{x^۲+y^۲}\le z\le\sqrt{۱۸-x^۲-y^۲}\right\}\\ D &= \left\{(x,y)\,\middle|\,۰\le y\le ۳\,,\ ۰\le x\le\sqrt{۹-y^۲}\right\}\end{aligned}$$

حال چون نقاط در V داخل کرهٔ به شعاع $\sqrt{۱۸}=۳\sqrt{۲}$ واقع هستند، در نتیجه داریم: $۰\le\rho\le ۳\sqrt{۲}$.

چون تصویر نقاط در V به D متعلق هستند و D ربع دایره واقع در ربع اول صفحه است، پس $۰\le\theta\le\pi/۲$ و از طرفی اگر θ و ρ ثابت باشد، آنگاه φ چنان می‌تواند تغییر کند که در ابتدا روی مخروط باشد و در انتها روی محور z ها. اما بر سطح مخروطی داریم $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ یعنی $\rho\cos\varphi=\sqrt{\rho^۲\sin^۲\varphi}$ یا $\sin\varphi=\cos\varphi$

بنابراین، بایستی $\varphi = \pi/۴$. نتیجه اینکه $۰ \leq \varphi \leq \pi/۴$ و چون $J = \rho^۲ \sin\varphi$، پس:

$$V' = \left\{(\rho,\varphi,\theta) \,\middle|\, ۰ \leq \rho \leq ۳\sqrt{۲},\ ۰ \leq \varphi \leq \frac{\pi}{۴},\ ۰ \leq \theta \leq \frac{\pi}{۲}\right\}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_۰^{\pi/۲}\left[\int_۰^{\pi/۴}\left[\int_۰^{۳\sqrt{۲}} \rho^۲\rho^۲ \sin\varphi\, d\rho\right] d\varphi\right] d\theta \\ &= \left(\int_۰^{\pi/۲} d\theta\right)\left(\int_۰^{\pi/۴} \sin\varphi\, d\varphi\right)\left(\int_۰^{۳\sqrt{۲}} \rho^۴\, d\rho\right) \\ &= [\theta]_۰^{\pi/۲}\,[-\cos\varphi]_۰^{\pi/۴}\left[\frac{\rho^۵}{۵}\right]_۰^{۳\sqrt{۲}} = \frac{۴۸۶}{۵}\pi \end{aligned}$$

پاسخ مسأله ٦) کره مذکور به معادله $f = x^۲ + y^۲ + z^۲ - ۳^۲ = ۰$ است. آن را به صورت دو رویه به معادلات زیر تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{aligned} S_۱ &: \quad z = \sqrt{۹ - x^۲ - y^۲}\ ;\ (x,y) \in D \\ S_۲ &: \quad z = -\sqrt{۹ - x^۲ - y^۲}\ ;\ (x,y) \in D \end{aligned}$$

که در آن $D : x^۲ + y^۲ \leq ۹$ (به شکل ۲.۲—(الف) توجه شود). در این صورت بردار قائم به $S_۱$ عبارت است از

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_۱ &= \pm\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \pm\frac{\overrightarrow{(۲x, ۲y, ۲z)}}{\sqrt{۴x^۲ + ۴y^۲ + ۴z^۲}} \\ &= \pm\frac{\overrightarrow{(۲x, ۲y, ۲z)}}{\sqrt{۴ \times ۹}} = \pm\overrightarrow{\left(\frac{x}{۳}, \frac{y}{۳}, \frac{z}{۳}\right)} \end{aligned}$$

چون $\mathbf{n}_۱$ رو به بالا است (یعنی مؤلفه z آن مثبت است) علامت + مورد قبول است. به صورت مشابه به دلیل اینکه $\mathbf{n}_۲$ رو به پایین است، $\mathbf{n}_۲ = \overrightarrow{\left(\frac{x}{۳}, \frac{y}{۳}, \frac{z}{۳}\right)}$. بعلاوه، دیفرانسیل مساحت سطوح $S_۱$ و $S_۲$ عبارتند از

$$\begin{aligned} d\sigma_۱ = d\sigma_۲ &= \frac{\|\nabla f\|}{|\frac{\partial f}{\partial z}|} dxdy = \frac{\sqrt{۴x^۲ + ۴y^۲ + ۴z^۲}}{|۲z|} dxdy \\ &= \frac{۳}{\sqrt{۹ - x^۲ - y^۲}} dxdy \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\iint_{(S_1)} \mathbf{F}\bullet\mathbf{n}_1 d\sigma_1 &= \iint_D \overrightarrow{(0,0,5z)}\bullet\overrightarrow{\left(\frac{x}{3},\frac{y}{3},\frac{z}{3}\right)}\frac{3\,dxdy}{\sqrt{9-x^2-y^2}}\\ &= \iint_D \frac{5z^2\,dxdy}{\sqrt{9-x^2-y^2}} = \iint_D 5\sqrt{9-x^2-y^2}\,dxdy\\ &= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^3 5\sqrt{9-r^2}r\,dr\right]d\theta\\ &= 5\Big[\theta\Big]_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{3}\left(9-r^2\right)^{3/2}\right]_0^3 = 90\pi\end{aligned}$$

به صورت مشابه

$$\begin{aligned}\iint_{(S_2)} \mathbf{F}\bullet\mathbf{n}_2\, d\sigma_2 &= \iint_D \overrightarrow{(0,0,5z)}\bullet\overrightarrow{\left(\frac{x}{3},\frac{y}{3},\frac{z}{3}\right)}\frac{3\,dxdy}{\sqrt{9-x^2-y^2}}\\ &= \iint_D \frac{5z^2\,dxdy}{\sqrt{9-x^2-y^2}} = \iint_D 5\sqrt{9-x^2-y^2}\,dxdy = 90\pi\end{aligned}$$

در نتیجه، انتگرال سطح مورد نظر برابر $90\pi + 90\pi = 180\pi$ است.

حال از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم. ملاحظه می‌شود که

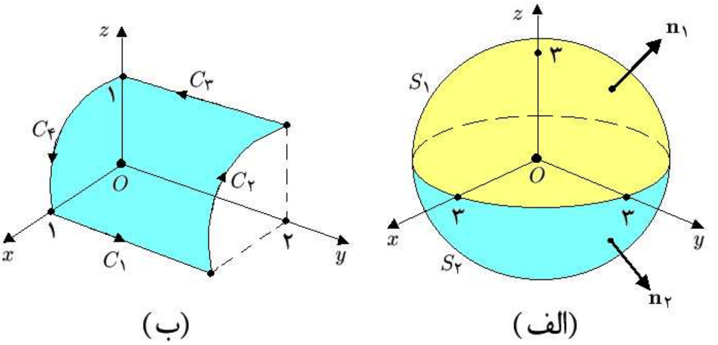
$$\mathrm{div}(\mathbf{F}) = \frac{\partial(0)}{\partial x} + \frac{\partial(0)}{\partial y} + \frac{\partial(5z)}{\partial z} = 5$$

در نتیجه، اگر $V: x^2+y^2+z^2 \le 3^2$ داخل S باشد، داریم

$$\iiint_V \mathrm{div}\mathbf{F}\,dxdydz = \iiint_V 5\,dxdydz = 5\mathrm{Vol}(V) = 5\times\frac{4}{3}\pi(3)^3 = 180\pi$$

پاسخ مسأله ۷) ابتدا انتگرال خط $\mathbf{F}$ را بر مرز S یعنی C محاسبه می‌کنیم. همان طوری که از شکل ۲.۲—(ب) برمی‌آید، C جمع چهار منحنی C_1، C_2، C_3 و C_4 است. برای این منظور لازم است که معادلات این منحنی‌ها را به صورت پارامتری بنویسیم. توجه می‌کنیم که C_1 پاره خط از $(1,0,0)$ به $(1,2,0)$ است. بنابراین

$$C_1 : \mathbf{r}_1(t) = (1-t)\overrightarrow{(1,0,0)} + t\overrightarrow{(1,2,0)} = \overrightarrow{(1,2t,0)}\ ,\quad 0\le t\le 1$$



شکل ۲.۲: (الف) مسألهٔ ۶ از امتحان اول (ب) مسألهٔ ۷ از امتحان اول

به صورت مشابه C_3 پاره خط از $(0,2,1)$ به $(0,0,1)$ است و لذا

$$\begin{aligned} C_3 \ : \ \mathbf{r}_3(t) &= (1-t)\overrightarrow{(0,2,1)} + t\overrightarrow{(0,0,1)} \\ &= \overrightarrow{(0,2-2t,1)} \quad ; \quad 0 \le t \le 1 \end{aligned}$$

منحنی C_2 عبارت از مقطع استوانه $x^2 + z^2 = 1$ با صفحهٔ $y = 2$ است، بنابراین می‌توانید فرض کنیم $x = \cos t$، $z = \sin t$، پس چون تنها C_2 در ربع اول واقع است، بنابراین

$$C_2 \ : \ \mathbf{r}_2(t) = \overrightarrow{(\cos t, 2, \sin t)} \quad ; \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

که جهت حرکت آن با مسألهٔ ما سازگار است. زیرا

$$\mathbf{r}_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \overrightarrow{(0,2,1)} \quad , \quad \mathbf{r}_2(0) = \overrightarrow{(1,2,0)}$$

به صورت مشابه چون C_4 مقطع استوانه $x^2 + z^2 = 1$ و $y = 0$ است، داریم

$$C_4 \ : \ \mathbf{r}_4(t) = \overrightarrow{(\sin t, 0, \cos t)} \quad ; \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

برای اینکه جهت حرکت C_4 عکس حرکت عقربه‌های ساعت شود، به جای $x = \cos t$ و $z = \sin t$ از $x = \sin t$ و $z = \cos t$ استفاده کرده‌ایم. اکنون محاسباتی به شرح زیر انجام می‌دهیم:

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}_1) \bullet \mathbf{r}_1'(t)\, dt = \int_0^1 \overrightarrow{(0,4,0)} \bullet \overrightarrow{(0,2,0)}\, dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{۰}^{۱} ۸\, dt = ۸ \\
\int_{C_۲} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} &= \int_{۰}^{\pi/۲} \mathbf{F}\left(\mathbf{r}_۲\right) \bullet \mathbf{r}'_۲(t)\, dt \\
&= \int_{۰}^{\pi/۲} \overrightarrow{(\sin t, ۴\cos t, ۲\sin t)} \bullet \overrightarrow{(-\sin t, ۰, \cos t)}\, dt \\
&= \int_{۰}^{\pi/۲} \left(-\sin^۲ t + ۲\sin t\cos t\right)\, dt \\
&= \left[\frac{-۱}{۲}t + \frac{۱}{۴}\sin(۲t) + \sin^۲ t\right]_{۰}^{\pi/۲} = ۱ - \frac{\pi}{۴} \\
\int_{C_۳} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} &= \int_{۰}^{۱} \mathbf{F}\left(\mathbf{r}_۳\right) \bullet \mathbf{r}'_۳(t)\, dt = \int_{۰}^{۱} \overrightarrow{(۱, ۰, ۲)} \bullet \overrightarrow{(۰, -۲, ۰)}\, dt \\
&= \int_{۰}^{۱} ۰\, dt = ۰ \\
\int_{C_۴} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} &= \int_{۰}^{\pi/۲} \mathbf{F}\left(\mathbf{r}_۴\right) \bullet \mathbf{r}'_۴(t)\, dt \\
&= \int_{۰}^{\pi/۲} \overrightarrow{(\cos t, ۴\sin t, ۲\cos t)} \bullet \overrightarrow{(\cos t, ۰, -\sin t)}\, dt \\
&= \int_{۰}^{\pi/۲} \left(\cos^۲ t - ۲\cos t\sin t\right)\, dt \\
&= \left[\frac{t}{۲} + \frac{۱}{۴}\sin ۲t - \sin ۲t\right]_{۰}^{\pi/۲} = \frac{\pi}{۴} - ۱
\end{aligned}
$$

بنابراین

$$
\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{C_۱} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} + \int_{C_۲} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} + \int_{C_۳} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} + \int_{C_۴} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = ۸
$$

اکنون همین انتگرال را با استفاده از قضیه استوکس محاسبه می‌کنیم. ابتدا کرل میدان برداری F را محاسبه می‌کنیم.

$$
\mathrm{Curl}(F) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ z & ۴x & ۲z \end{vmatrix} = \overrightarrow{(۰ - ۰, ۱ - ۰, ۴ - ۰)} = \overrightarrow{(۰, ۱, ۴)}
$$

چون رویه مورد نظر، که آن را S می‌نامیم، به صورت $f = x^۲ + z^۲ - ۱ = ۰$ قابل بیان است، داریم

$$
\mathbf{n} = \pm\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \pm\frac{\overrightarrow{(۲x, ۰, ۲z)}}{\sqrt{۴x^۲ + ۰ + ۴z^۲}} = \pm\overrightarrow{(x, ۰, z)}
$$

نظر به اینکه $\mathbf{n}$ رو به بالا است، علامت + قابل قبول است. به علاوه

$$d\sigma = \frac{\|\nabla f\|}{|\partial f/\partial z|}\, dxdy = \frac{\sqrt{۴x^۲ + ۰ + ۴z^۲}}{|۲z|}\, dxdy = \frac{dxdy}{z}$$

به علاوه تصویر S بر صفحهٔ xOy عبارت است از

$$D = \{(x,y) \mid ۰ \leq x \leq ۱, ۰ \leq y \leq ۲\}$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} \mathrm{Curl}\,(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}\, d\sigma &= \iint_D \overrightarrow{(۰, ۱, ۴)} \bullet \overrightarrow{(x, ۰, z)}\, \frac{dxdy}{z} \\ &= \iint_D ۴\, dxdy = ۴\,\mathrm{Area}\,(D) = ۴ \times ۱ \times ۲ = ۸ \end{aligned}$$

که با مقدار قبلی برابر است.

پاسخ تست ۸) از قاعدهٔ زنجیره‌ای استفاده می‌کنیم. اگر فرض کنیم $u = y/x$ و $v = z/x$، آنگاه داریم

$$\begin{aligned} w_x &= ۲xf + x^۲\left(\frac{\partial u}{\partial x} f_u + \frac{\partial v}{\partial x} f_v\right) = ۲xf - yf_u - zf_v \\ w_y &= x^۲\left(\frac{\partial u}{\partial y} f_u + \frac{\partial v}{\partial y} f_v\right) = xf_u \\ w_z &= x^۲\left(\frac{\partial u}{\partial z} f_u + \frac{\partial v}{\partial z} f_v\right) = xf_v \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} xw_x + yw_y + zw_z &= ۲x^۲ f - xyf_u - xzf_v + xyf_u + xzf_v \\ &= ۲x^۲ f = ۲w \end{aligned}$$

پس گزینه (الف) صحیح است.

پاسخ تست ۹) بردار هادی خط اول $\mathbf{v}_۱ = \overrightarrow{(۲, ۱, -۵)}$ است زیرا معادلهٔ آن را به صورت نرمال $\frac{x}{۲} = \frac{y+۱}{۱} = \frac{z-۱}{-۵}$ می‌شود بازنویسی کرد. بردار هادی خط دوم عبارت است از $\mathbf{v}_۲ = \overrightarrow{(۳, ۳, ۴)}$ که چون نسبت مختصات $\mathbf{v}_۱$ به $\mathbf{v}_۲$ برابر نیستند

$\left(\frac{۴}{-۵} \neq \frac{۳}{۱} \neq \frac{۳}{۲}\right)$. پس این دو خط موازی نیستند. برای اینکه بفهمیم این دو خط متقاطع هستند یا نه، آن دو را پارامتره می‌کنیم

$$L_۱ \ : x = ۲t, \ y = t - ۱, \ z = -۵t + ۱$$
$$L_۲ \ : x = ۳s - ۱, \ y = ۳s, \ z = ۴s + ۳$$

و دستگاه $L_۱ \cap L_۲$ را حل می‌کنیم. ابتدا با برابر قرار دادن x و y دو خط، s و t را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{cases} ۲t = ۳s - ۱ \\ t - ۱ = ۳s \end{cases} \quad \begin{cases} ۶s + ۲ = ۳s - ۱ \\ t - ۱ = ۳s \end{cases} \quad \begin{cases} s = -۱ \\ t = -۲ \end{cases}$$

آنگاه با برابر قرار دادن x و z دو خط، s و t را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{cases} ۲t = ۳s - ۱ \\ -۵t + ۱ = ۴s + ۳ \end{cases} \quad \begin{cases} ۱۰t = ۱۵s - ۵ \\ -۱۰t = ۸s + ۴ \end{cases} \quad \begin{cases} t = \frac{-۱۰۰}{۲۳} \\ s = \frac{۱}{۲۳} \end{cases}$$

پس دو خط مذکور غیر متقاطع هستند. چون این دو خط غیر موازی و غیر متقاطع می‌باشند، پس متنافر هستند و بنابراین گزینهٔ (ت) صحیح است.

پاسخ تست ۱۰) می‌دانیم گرادیان تابع معرف یک سطح، بر آن سطح عمود است پس بردار قائم بر صفحهٔ مماس مورد نظر عبارت است از $\mathbf{n} = \nabla f = \overrightarrow{(x, ۲y, z)}$ اما بایستی این صفحه با صفحهٔ داده شده موازی باشد؛ یعنی، بایستی بردارهای قائم آن دو موازی باشند: $\overrightarrow{(x, ۲y, z)} \| \overrightarrow{(۲, -۴, ۲)}$ و این معادل است با برقراری تساوی‌های $\frac{x}{۲} = \frac{۲y}{-۴} = \frac{z}{۲}$. بنابراین $-y = x = z$ و با قرار دادن این تساوی‌ها در معادلهٔ بیضی‌گون (به دلیل اینکه بایستی نقطهٔ پایه به سطح متعلق باشد) داریم $\frac{۱}{۲}(z)^۲ + (-z)^۲ + \frac{۱}{۲}z^۲ = \frac{۱}{۲}$ یا $z^۲ = \frac{۱}{۴}$ و $z = \pm\frac{۱}{۲}$. یعنی، در دو نقطه از بیضی‌گون، صفحهٔ داده شده موازی است: اگر $z = \frac{۱}{۲}$ آنگاه $X_۰ = \left(\frac{۱}{۲}, \frac{-۱}{۲}, \frac{۱}{۲}\right)$ و $\mathbf{n} = \overrightarrow{(۱/۲, -۱, ۱/۲)}$، بنابراین $\frac{۱}{۲}\left(x - \frac{۱}{۲}\right) - \left(y + \frac{۱}{۲}\right) + \frac{۱}{۲}\left(z - \frac{۱}{۲}\right) = ۰$ و یا $x - ۲y + z = ۲$ معادلهٔ صفحه مماس است. اگر $z = \frac{-۱}{۲}$، آنگاه $X_۰ = \left(\frac{-۱}{۲}, \frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۲}\right)$ و $\mathbf{n} = \overrightarrow{(-۱/۲, ۱, -۱/۲)}$. بنابراین $\frac{-۱}{۲}\left(x + \frac{۱}{۲}\right) + \left(y - \frac{۱}{۲}\right) - \frac{۱}{۲}\left(z + \frac{۱}{۲}\right) = ۰$ و یا $x - ۲y + z = -۲$ معادلهٔ صفحه مماس است. پس گزینهٔ (الف) صحیح است.

۲.۲ امتحان دوم

صورت مسایل

۱) در پیوستگی یا عدم پیوستگی تابع $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^۲}{x^۲+y^۲} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$ در نقطهٔ $(۰,۰)$ بحث کنید.

۲) معادله خط مماس بر فصل مشترک دو رویهٔ $۳x^۲+y^۲-z^۲=۳$ و $x^۲+y^۲+z=۱$ را در نقطهٔ $P\,(۱,-۱,-۱)$ بدست آورید. سپس معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که از نقطهٔ $M\,(۲,۳,۴)$ گذشته و عمود بر این خط مماس باشد.

۳) هرگاه $u=yf\,(x+y)+xg\,(x+y)$ باشد، آنگاه نشان دهید که $u_{xx}-۲u_{yx}+u_{yy}=۰$.

۴) مطلوب است محاسبه $\iint_D xdxdy$ که در آن D ناحیه واقع در ربع اول و بین دوایر $x^۲+y^۲=۴$ و $x^۲+y^۲=۲x$ است.

۵) حجم قسمتی از کره $x^۲+y^۲+z^۲=۲$ که به مخروط $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ محدود شده است را به دست آورید.

٦) تابع برداری $\mathbf{F}=x^۳\mathbf{i}+\frac{۱}{۴}y^۳\mathbf{j}+z^۳\mathbf{k}$ مفروض است. انتگرال سطح این تابع را بر روی سطح بیضی گون خارجی $x^۲+\frac{۱}{۴}y^۲+z^۲=۱$ به کمک قضیه دیورژانس (واگرایی) محاسبه کنید.

۷) فرض کنید S آن قسمت از سطح سهمی گون $z=۱-x^۲-y^۲$ باشد که بالای صفحه $z=۰$ واقع است و منحنی C مرز آن است. با توجه به این مفروضات، درستی قضیه استوکس را برای تابع برداری $\mathbf{F}=y\mathbf{i}+z\mathbf{j}+x\mathbf{k}$ تحقیق کنید.

حل مسایل

پاسخ مسألهٔ ۱) اگر فرض کنیم $\mathbf{r}_\alpha(t) = \overrightarrow{(t, \alpha t)}$، آنگاه $\lim\limits_{t\to ۰} \mathbf{r}_\alpha(t) = \overrightarrow{(۰, ۰)}$ و حد مسیری f بر $\mathbf{r}_\alpha$ برابر است با

$$\lim_{t\to ۰} \frac{(t)\,(\alpha t)^۲}{(t)^۲ + (\alpha t)^۲} = \lim_{t\to ۰} \frac{\alpha^۲ t^۳}{(۱ + \alpha^۲)\, t^۲} = \frac{\alpha^۲}{۱+\alpha^۲} \lim_{t\to ۰} t = ۰ = f\,(۰, ۰)$$

پس **احتمالاً** f در مبداء پیوسته است. برای نشان دادن اینکه این حدس صحیح است، باید ثابت کنیم $\lim\limits_{(x,y)\to(۰,۰)} f(x, y) = ۰ = f\,(۰, ۰)$. یعنی

$$\forall\varepsilon\exists\delta\forall\overrightarrow{(x, y)} \left(۰ < \|\overrightarrow{(x, y)} - \overrightarrow{(۰, ۰)}\| < \delta \Longrightarrow \left| \frac{xy^۲}{x^۲ + y^۲} - ۰ \right| < \varepsilon \right)$$

از فرض $\|\overrightarrow{(x, y)} - \overrightarrow{(۰, ۰)}\| < \delta$ نتیجه می‌شود که $\sqrt{x^۲ + y^۲} < \delta$ و چون $|x|$ و $|y|$ هر دو از سمت چپ این عبارت کوچک‌ترند، پس $|x| < \delta$ و $|y| < \delta$. بنابراین اگر z را ماکزیمم $|x|$ و $|y|$ بگیریم، آنگاه $z < \delta$. اکنون ملاحظه می‌کنیم که

$$\left| \frac{xy^۲}{x^۲ + y^۲} - ۰ \right| = \frac{|x||y|^۲}{|x|^۲ + |y|^۲} < \frac{z \times z^۲}{z^۲ + ۰^۲} = z < \delta$$

پس کافی است فرض شود $\delta = \varepsilon$. توضیح اینکه در نامساوی اول، در مخرج عبارت سمت چپ، میان $|x|^۲$ و $|y|^۲$ یکی برابر $z^۲$ است، آن را نگاه داشته و بجای دیگری صفر قرار داده‌ایم. بنابراین f در $(۰, ۰)$ پیوسته است.

پاسخ مسألهٔ ۲) به منظور ساده شدن بحث، نمادهایی به شرح زیر ارائه می‌کنیم

$$S_۲ : f_۲ = ۳x^۲ + y^۲ - z^۲ - ۳ = ۰ \quad , \quad S_۱ : f_۱ = x^۲ + y^۲ + z - ۱ = ۰$$

حال چون منحنی مورد نظر C فصل مشترک $S_۱$ و $S_۲$ است، پس مماس بر آن، هم به $S_۱$ مماس است و هم به $S_۲$. از طرفی $\nabla f_۱\,(P)$ در نقطهٔ P به $S_۱$ و $\nabla f_۲\,(P)$ در نقطهٔ P به $S_۲$ عمود است، بنابراین بایستی بردار مماس به C در نقطهٔ P، که آن را $\mathbf{v}$ می‌نامیم، به $\nabla f_۱\,(P)$ و نیز به $\nabla f_۲\,(P)$ عمود باشد. از این رو، موازی حاصل ضرب خارجی این دو گرادیان است؛ و چون طول بردار مماس در معادلهٔ خط مماس مؤثر نیست، می‌توانیم موازی بودن آن را به معنی تساوی بدانیم. به عبارت دیگر $\mathbf{v} = \nabla f_۱\,(P) \times \nabla f_۲\,(P)$ که در آن

$$\begin{aligned} \nabla f_۱\,(P) &= \overrightarrow{(۲x, ۲y, ۱)}\Big|_P = \overrightarrow{(۲, -۲, ۱)} \\ \nabla f_۲\,(P) &= \overrightarrow{(٦x, ۲y, -۲z)}\Big|_P = \overrightarrow{(٦, -۲, ۲)} \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۲ & -۲ & ۱ \\ ٦ & -۲ & ۲ \end{vmatrix} = \overrightarrow{(-۲, ۲, ۸)}$$

بنابراین خط مماس خواسته شده، خطی است که از P موازی $\mathbf{v}$ می‌گذرد. یعنی، به معادله $\ell : \frac{x-۱}{-۲} = \frac{y+۱}{۲} = \frac{z+۱}{۸}$ است. صفحه مورد نظر، صفحه‌ای است که از M عمود به $\mathbf{v}$ (راستای ℓ) می‌گذرد. بنابراین $(x-۲) - (y-۳) - ۴(z-۴) = ۰$ و در نتیجه معادلهٔ آن عبارت از $x - y - ۴z = -۱۷$ است.

پاسخ مسألهٔ ۳) اگر فرض کنیم $t = x + y$، آنگاه

$$f_x = t_x f_t = ۱ \times f' = f' \quad , \quad f_{xx} = (f_x)_x = t_x (f')_t = ۱ \times f'' = f''$$

به همین نحو f_y، g_x و g_y نیز برابر f' هستند و f_{yy}، f_{xy}، g_{xx}، g_{xy} و g_{yy} برابر f'' هستند. بنابراین،

$$\begin{aligned} u_x &= y_x f + y f_x + x_x g + x g_x = ۰ + y f' + g + x g' \\ u_{xx} &= (u_x)_x = y_x f' + y (f')_x + g_x + x_x g' + x (g')_x \\ &= ۰ + y f'' + g' + g' + x g'' = y f'' + ۲ g' + x g'' \end{aligned}$$

به صورت مشابه $u_y = y f' + f + x g'$ و $u_{xy} = y f'' + ۲ f' + x g''$. همچنین

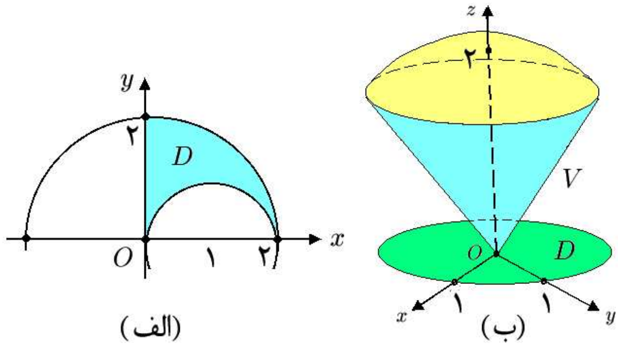
$$\begin{aligned} u_{xy} &= (u_x)_y = y_y f' + y (f')_y + g_y + x_y g' + x (g')_y \\ &= f' + y f'' + g' + ۰ + x g'' = y f'' + f' + g' + x g'' \end{aligned}$$

بنابراین، با جاگذاری سه مقدار بالا داریم

$$\begin{aligned} u_{xx} - ۲ u_{xy} + u_{yy} = (y f'' + ۲ g' + x g'') - ۲ (y f'' + f' + g' + x g'') \\ + (y f'' + ۲ f' + x g'') = ۰ \end{aligned}$$

پاسخ مسألهٔ ۴) با توجه به اینکه $x^۲ + y^۲ = ۲x$ را به صورت $(x-۱)^۲ + y^۲ = ۱$ می‌شود باز نویسی کرد، شکل ۳.۲—(الف) را ترسیم می‌کنیم. ناحیهٔ مورد نظر عبارت است از داخل دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۴$، خارج دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۲x$ و واقع در ربع اول:

$$D : ۲x \leq x^۲ + y^۲ \leq ۴, ۰ \leq x, ۰ \leq y$$



شکل ۳.۲: (الف) مسألهٔ ۴ از امتحان دوم (ب) مسألهٔ ۵ از امتحان دوم

در نتیجه، شکل قطبی آن

$$\begin{aligned} D' \quad &: \quad ۲r\cos\theta \le r^{۲} \le ۴,\ ۰ \le r\cos\theta,\ ۰ \le r\sin\theta \\ &: \quad ۲\cos\theta \le r \le ۲,\ ۰ \le \theta \le \frac{\pi}{۲} \end{aligned}$$

است. بنابراین

$$\begin{aligned} \iint_D x\,dx\,dy &= \iint_{D'} (r\cos\theta)\, r\,dr\,d\theta = \int_{۰}^{\pi/۲} \left[\int_{۲\cos\theta}^{۲} r^{۲}\cos\theta\,dr\right] d\theta \\ &= \int_{۰}^{\pi/۲} \left[\frac{r^{۳}}{۳}\cos\theta\right]_{۲\cos\theta}^{۲} d\theta = \frac{۸}{۳}\int_{۰}^{\pi/۲} \left(\cos\theta - \cos^{۴}\theta\right) d\theta \\ &= \frac{۸}{۳}[\sin\theta]_{۰}^{\pi/۲} - \frac{۲}{۳}\int_{۰}^{\pi/۲} (۱+\cos(۲\theta))^{۲}\, d\theta = \frac{۸}{۳} - \frac{\pi}{۲} \end{aligned}$$

پاسخ مسألهٔ ۵) ابتدا کره و مخروط داده شده را به صورت شکل ۳.۲—(ب) ترسیم می‌کنیم. ناحیهٔ مذکور V زیر نیم کرهٔ شمالی واقع است و لذا $z \le \sqrt{۲-x^{۲}-y^{۲}}$. از طرفی، v بالای مخروط واقع است، پس $\sqrt{x^{۲}+y^{۲}} \le z$. در نتیجه اگر از مختصات استوانه‌ای استفاده کنیم، آنگاه $r \le z \le \sqrt{۲-r^{۲}}$. از طرفی با قطع دادن کره و مخروط داریم $۲z^{۲} = ۲$ و چون $۰ \le z$، بنابراین $z = ۱$. در نتیجه تصویر لبهٔ خارجی V بر xOy عبارت است از $x^{۲}+y^{۲} = ۱$. بنابراین، تصویرش $D : x^{۲}+y^{۲} \le ۱$ است. پس در مختصات قطبی $D' : ۰ \le \theta \le ۲\pi,\ ۰ \le r \le ۱$ و اگر V' تصویر استوانه‌ای V

در فضای $Or\theta z$ باشد، داریم

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{V} dxdydz &= \iiint\limits_{V'} rdzdrd\theta = \iint\limits_{D'} \left[\int_{r}^{\sqrt{۲-r^{۲}}} rdz\right] drd\theta \\
&= \iint\limits_{D'} \left[rz\right]_{z=r}^{z=\sqrt{۲-r^{۲}}} drd\theta = \iint\limits_{D'} \left(r\sqrt{۲-r^{۲}}-r^{۲}\right) drd\theta \\
&= \int_{۰}^{۲\pi} \left[\int_{۰}^{۱} \left(r\sqrt{۲-r^{۲}}-r^{۲}\right) dr\right] d\theta \\
&= \int_{۰}^{۲\pi} \left[\frac{-۱}{۳}\left(۲-r^{۲}\right)^{۳/۲}-\frac{r^{۳}}{۳}\right]_{۰}^{۱} d\theta = \int_{۰}^{۲\pi} \frac{۲}{۳}\left(\sqrt{۲}-۱\right) d\theta \\
&= \frac{۲}{۳}\left(\sqrt{۲}-۱\right)\left[\theta\right]_{۰}^{۲\pi} = \frac{۴\pi}{۳}\left(\sqrt{۲}-۱\right)
\end{aligned}$$

پاسخ مسألهٔ ٦) چون میدان $\mathbf{F}$ بر بیضی گون S و داخلش، یعنی V، پیوسته و بر V مشتق‌پذیر است، از قضیهٔ دیورژانس می‌شود استفاده کرد. اما

$$\mathrm{div}\,(\mathbf{F}) = \frac{\partial\left(x^{۳}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(y^{۳}/۴\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(z^{۳}\right)}{\partial z} = ۳x^{۲}+\frac{۳}{۴}y^{۲}+۳z^{۲}$$

در نتیجه،

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{(S)} \mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma &= \iiint\limits_{V} \mathrm{div}\,(\mathbf{F})\; dxdydz \\
&= \iiint\limits_{V} ۳\left(x^{۲}+\frac{۱}{۴}y^{۲}+z^{۲}\right) dxdydz
\end{aligned}$$

برای حل انتگرال سه گانهٔ سمت راست، از تغییر مقیاس $x=u$، $y=۲v$ و $z=w$ استفاده می‌کنیم. در این صورت

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = |\det\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}| = |۲| = ۲$$

و دامنهٔ $V: x^{۲}+\frac{۱}{۴}y^{۲}+z^{۲}\leq ۱$ به $V': u^{۲}+v^{۲}+w^{۲}\leq ۱$ تبدیل می‌شود، که کره‌ای به مرکز مبداء و شعاع یک در فضای $Ouvw$ است. در نتیجه

$$\iint\limits_{(S)} \mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint\limits_{V'} ۳\left(u^{۲}+v^{۲}+w^{۲}\right)\times ۲dudvdw$$

$$\begin{aligned}
&\overset{(1)}{=} && 6\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi}\left[\int_0^{1}\rho^2\times\rho^2\sin\varphi\,d\rho\right]d\varphi\right]d\theta\\
&= && 6\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\right)\left(\int_0^{1}\rho^4\,d\rho\right)\\
&= && 6\Big[\theta\Big]_0^{2\pi}\Big[-\cos\varphi\Big]_0^{\pi}\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^{1}=\frac{24\pi}{5}
\end{aligned}$$

که در (۱) از مختصات کروی استاندارد در فضای $Ouvw$ استفاده کرده‌ایم.

پاسخ مسأله ۷) ابتدا C را با قطع دادن سهمی‌گون $z=1-x^2-y^2$ و صفحه $z=0$ به صورت $C\ :\ x^2+y^2=1,\ z=0$ معرفی کرده، و سپس به صورت

$$C\ :\ \mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(\cos t,\sin t,0)}\quad;\quad 0\le t\le 2\pi$$

پارامتره می‌کنیم. چرا که در قضیه استوکس لازم است همواره روی سطح S، در سمت چپ بردار مماس به منحنی C واقع باشد. در نتیجه

$$\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi}\mathbf{F}\left(\mathbf{r}(t)\right)\bullet\mathbf{r}'(t)\,dt\\
&= \int_0^{2\pi}\overrightarrow{(\sin t,\,0\,,\cos t)}\bullet\overrightarrow{(-\sin t,\cos t,\,0\,)}\,dt\\
&= \int_0^{2\pi}-\sin^2 t\,dt=\int_0^{2\pi}-\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt\\
&= \left[-\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi}=-\pi
\end{aligned}$$

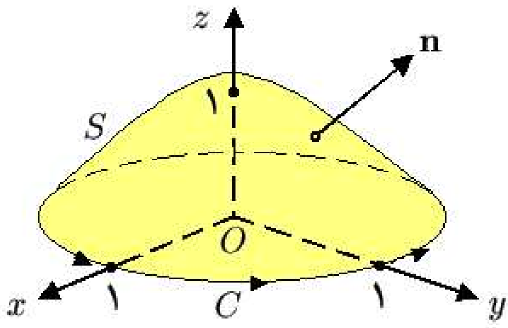
اکنون سعی می‌کنیم تا با استفاده از قضیه استوکس، انتگرال $\oint_C\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$ را محاسبه کنیم. ابتدا توجه می‌کنیم که

$$\operatorname{Curl}(\mathbf{F})=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\ y&z&x\end{vmatrix}=\overrightarrow{(0-1,0-1,0-1)}=-\overrightarrow{(1,1,1)}$$

به علاوه رویه S را به صورت $f=x^2+y^2+z-1=0$ معرفی می‌کنیم. بنابراین

$$\mathbf{n}=\pm\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}=\pm\frac{\overrightarrow{(2x,2y,1)}}{\sqrt{4x+4y^2+1}}$$

که چون (همان طوری که از شکل ۳.۲ بر می‌آید) $\mathbf{n}$ رو به بالا دارد (یعنی، مؤلفه z آن مثبت است) علامت $+$ مورد قبول است. همچنین



شکل ۴.۲: پاسخ مسألهٔ ۴ از امتحان دوم

$$d\sigma = \frac{\|\nabla f\|}{|\frac{\partial f}{\partial z}|}\, dxdy = \frac{\sqrt{۴x^۲ + ۴y^۲ + ۱}}{|۱|} dxdy = \sqrt{۴x^۲ + ۴y^۲ + ۱}\, dxdy$$

و در نتیجه اگر D تصویر سطح بر صفحه xOy باشد، یعنی $D : x^۲ + y^۲ \leq ۱$، آنگاه

$$\begin{aligned}
&\iint_{(S)} \operatorname{Curl}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}\, d\sigma = \\
&= \iint_D -\overrightarrow{(۱, ۱, ۱)} \bullet \frac{\overrightarrow{(۲x, ۲y, ۱)}}{\sqrt{۴x^۲ + ۴y^۲ + ۱}} \sqrt{۴x^۲ + ۴y^۲ + ۱}\, dxdy \\
&= \iint_D -(۲x + ۲y + ۱)\, dxdy \\
&= -۲ \iint_D x\, dxdy - ۲ \iint_D y\, dxdy - \iint_D dxdy \\
&\overset{(۱)}{=} -۲ \times ۰ - ۲ \times ۰ - \operatorname{Area}(D) = -\pi \times ۱^۲ = -\pi
\end{aligned}$$

توضیح اینکه در تساوی (۱) چون x و y توابعی فردند و دامنه D نسبت به آنها متقارن است، دو انتگرال اول صفرند.

۳.۲ امتحان سوم

صورت مسایل

۱) معادلهٔ صفحه‌ای را بیابید که از دو نقطهٔ $(۰,۱,۱)$ و $(۱,۱,۰)$ به یک فاصله است و از بین آن دو نیز می‌گذرد.

۲) در پیوستگی یا عدم پیوستگی تابع $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^۲ y}{x^۴+y^۲} & (x,y) \neq (۰,۰) \\ ۰ & (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$ در نقطهٔ $(۰,۰)$ بحث کنید.

۳) فرض کنیم منحنی C به صورت فصل مشترک دو رویهٔ

$$x^۲ + y^۲ = \frac{۱}{۴}z^۲ + ۱ \ , \ \ z = x^۲ + y^۲$$

تعریف شود. بردارهای $\mathbf{T}$، $\mathbf{N}$ و $\mathbf{B}$، و مقادیر انحنا و تاب را در یک نقطهٔ دلخواه (x,y,z) بیابید.

۴) با فرض $F(x,y,z) = ۰$، مقدار عبارت $\frac{\partial x}{\partial y} \times \frac{\partial z}{\partial x} \times \frac{\partial y}{\partial z}$ را بیابید.

۵) مطلوب است محاسبهٔ مساحت قسمتی از سطح $z = x^۲ - y^۲$ که داخل استوانهٔ $x^۲ + y^۲ = ۴$ قرار دارد.

٦) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال $\iiint_R \left[\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} + \frac{z^۲}{c^۲}\right] dxdydz$.

۷) هرگاه $\mathbf{F}(x,y,z) = z^۲\mathbf{i} + x^۲\mathbf{j} + y^۲\mathbf{k}$، درستی قضیه دیورژانس را برای سطحی که از بالا به کره $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۲$ و از پایین به سهمیگون $z = x^۲ + y^۲$ محصور است تحقیق کنید.

۸) هرگاه منحنی C به معادلات $C \ : \ x^۲ + y^۲ = a^۲ \, , \, z = x + y$ داده شده باشد، به کمک قضیه استوکس انتگرال خط زیر را محاسبه کنید:

$$\oint_C xdx + (x+y) \ dy + (x+y+z) \ dz$$

حل مسایل

پاسخ مسألهٔ ۱) فرض کنیم $M=(x,y,z)$ نقطه‌ای واقع بر صفحهٔ مطلوب باشد، پس فاصهٔ آن تا $A=(۱,۱,۰)$ و $B=(۰,۱,۱)$ به یک اندازه است، اما

$$\begin{aligned} d(M,A) &= \|M-A\| = \left\|\overrightarrow{(x-۱,y-۱,z)}\right\| \\ &= \sqrt{(x-۱)^۲+(y-۱)^۲+z^۲} \\ d(M,B) &= \|M-B\| = \left\|\overrightarrow{(x,y-۱,z-۱)}\right\| \\ &= \sqrt{x^۲+(y-۱)^۲+(z-۱)^۲} \end{aligned}$$

بنابراین $d(M,A)=d(M,B)$ به این معنی است که

$$(x-۱)^۲+(y-۱)^۲+z^۲ = x^۲+(y-۱)^۲+(z-۱)^۲$$

پس از ساده کردن، معادلهٔ صفحه به صورت $x=z$ حاصل می‌شود.

پاسخ مسألهٔ ۲) به نظر می‌رسد که وضعیت $x^۲$ و y در صورت و مخرج یکی است، بنابراین مسیر $y=ax^۲$ یا $\mathbf{r}_a(t)=\overrightarrow{(t,at^۲)}$ را در نظر می‌گیریم، که a عددی ثابت است. به این ترتیب، حد f بر مسیر $\mathbf{r}_a$ برابر است با

$$\lim_{t\to ۰} f(\mathbf{r}_a(t)) = \lim_{t\to ۰}\frac{t^۲\left(at^۲\right)}{t^۴+\left(at^۲\right)^۲} = \frac{a}{۱+a^۲}$$

که چون به a بستگی دارد، حد f در $\lim\limits_{t\to ۰}\mathbf{r}_a(t)=\overrightarrow{(۰,۰)}$ موجود نیست.

پاسخ مسألهٔ ۳) ابتدا مقدار $x^۲+y^۲$ را از معادلهٔ اول در معادلهٔ دوم قرار داده و به دست می‌آوریم $z=z^۲/۴+۱$ بنابراین $z^۲-۴z+۴=۰$ یا $z=۲$. پس در مجموع، داریم $C\ :\ x^۲+y^۲=۲, z=۲$ که آن را به صورت

$$C\ :\ \mathbf{r}(t)=\left(\sqrt{۲}\cos t,\sqrt{۲}\sin t,۲\right)\ ;\ ۰\le t\le ۲\pi$$

می‌شود پارامتره کرد. اکنون $\mathbf{r}'(t)=\overrightarrow{\left(-\sqrt{۲}\sin t,\sqrt{۲}\cos t,۰\right)}$ و

$$\mathbf{r}''(t)=\overrightarrow{\left(-\sqrt{۲}\cos t,-\sqrt{۲}\sin t,۰\right)}\quad,\quad \mathbf{r}'''(t)=\overrightarrow{\left(\sqrt{۲}\sin t,-\sqrt{۲}\cos t,۰\right)}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{r}'\| &= \sqrt{\left(-\sqrt{۲}\sin t\right)^{۲} + \left(\sqrt{۲}\cos t\right)^{۲} + ۰^{۲}} = \sqrt{۲} \\
\|\mathbf{r}''\| &= \sqrt{\left(-\sqrt{۲}\cos t\right)^{۲} + \left(-\sqrt{۲}\sin t\right)^{۲} + ۰^{۲}} = \sqrt{۲} \\
\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sqrt{۲}\sin t & \sqrt{۲}\cos t & ۰ \\ -\sqrt{۲}\cos t & -\sqrt{۲}\sin t & ۰ \end{vmatrix} \\
&= \overrightarrow{\left(۰, ۰, ۲\sin^{۲} t + ۲\cos^{۲} t\right)} = \overrightarrow{(۰, ۰, ۲)} \\
\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\| &= \sqrt{۰^{۲} + ۰^{۲} + ۲^{۲}} = ۲
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|} = \overrightarrow{(-\sin t, \cos t, ۰)} \qquad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|} = \overrightarrow{(۰, ۰, ۱)}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T} = \overrightarrow{(-\cos t, -\sin t, ۰)} \qquad \kappa = \frac{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}{\|\mathbf{r}'\|^{۳}} = \frac{۲}{\left(\sqrt{۲}\right)^{۳}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tau = \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \bullet \mathbf{r}'''}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|^{۲}} = \frac{\overrightarrow{(۰, ۰, ۲)} \bullet \overrightarrow{\left(\sqrt{۲}\sin t, -\sqrt{۲}\cos t, ۰\right)}}{(۲)^{۲}} = ۰$$

پاسخ مسأله ۴) اگر y را تابعی از x و z در نظر بگیریم، آنگاه با مشتق‌گیری از طرفین رابطهٔ $F(x, y, z) = ۰$ نسبت به z داریم $\frac{\partial x}{\partial z}F_x + \frac{\partial x}{\partial z}F_y + \frac{\partial z}{\partial z}F_z = ۰$ اکنون چون x و z مستقل فرض شده‌اند، پس $\frac{\partial x}{\partial z} = ۰$ و یا اینکه $\frac{\partial y}{\partial z}F_y + F_z = ۰$ و $\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{F_z}{F_y}$. به صورت مشابه، داریم $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$ و $\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_x}$. بنابراین

$$\frac{\partial y}{\partial z} \times \frac{\partial z}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{-F_z}{F_y}\frac{-F_x}{F_z}\frac{-F_y}{F_x} = -۱$$

پاسخ مسأله ۵) واضح است که تصویر قسمت جدا شده از سهمی گون هذلولوی به معادله $z = x^{۲} - y^{۲}$ توسط استوانهٔ مستدیر $x^{۲} + y^{۲} = ۴$، بر صفحه xOy مجموعهٔ $D : x^{۲} + y^{۲} \leq ۴$ است. بنابراین در این مسأله با سطح $S : z = x^{۲} - y^{۲}; (x, y) \in D$ مواجه هستیم. برای محاسبهٔ المان مساحت آن، قرارداد می‌کنیم $f = x^{۲} - y^{۲} - z$. در

این صورت

$$d\sigma = \frac{\|\nabla f\|}{|\frac{\partial f}{\partial z}|} dxdy = \frac{\left\|\overrightarrow{(2x,-2y,-1)}\right\|}{|-1|} dxdy = \sqrt{4x^2+4y^2+1}\, dxdy$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \text{Area}(S) &= \iint_{(S)} d\sigma = \iint_D \sqrt{4x^2+4y^2+1}\, dxdy \\ &\overset{(1)}{=} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^2 \sqrt{4r^2+1}\, r dr\right] d\theta \\ &\overset{(2)}{=} \int_0^{2\pi} \left[\int_1^{\sqrt{17}} \sqrt{u}\frac{du}{8}\right] d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{8}\left[\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_1^{\sqrt{17}} d\theta \\ &= \frac{1}{12}\left(17\sqrt{17}-1\right)\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17}-1\right) \end{aligned}$$

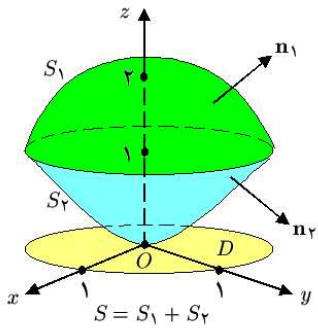
توضیح اینکه در تساوی (۱) از مختصات قطبی استفاده کرده‌ایم و به این نکته توجه داشته‌ایم که شعاع D برابر ۲ است. در تساوی (۲) از تغییر متغیر $u = 4r^2+1$ استفاده کرده‌ایم.

پاسخ مسأله ٦) ابتدا از مختصات متجانس $z = cw$ و $y = bv$ و $x = au$ به منظور از میان بردن مخرج x^2، y^2 و z^2 استفاده می‌کنیم. در این حالت $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ به صورت $u^2+v^2+w^2$ تبدیل می‌شود و لذا تصویر R در فضای $Ouvw$ عبارت است از $R' : u^2+v^2+w^2 \leq 1$ که کره‌ای به شعاع یک و مرکز در مبداء است. از طرفی

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = |\det \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}| = |abc|$$

در نتیجه، با استفاده از مختصات کروی برای فضای $Ouvw$ داریم

$$\begin{aligned} \iiint_R \left[\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right] dxdydz &= \iiint_{R'} \left(u^2+v^2+w^2\right) |abc|\, dudvdw \\ &= |abc| \iiint_{R'} \left(u^2+v^2+w^2\right) dudvdw \\ &= |abc| \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\pi} \left[\int_0^1 \rho^2 \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\right] d\varphi\right] d\theta \end{aligned}$$



شکل ۵.۲: پاسخ مسألهٔ ۷ از امتحان سوم

$$\begin{aligned} &= |abc|\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi\right)\left(\int_0^{1} \rho^4\, d\varphi\right) \\ &= |abc|\Big[\theta\Big]_0^{2\pi}[-\cos\varphi]_0^{\pi}\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^1 = \frac{4\pi}{5}|abc| \end{aligned}$$

پاسخ مسأله ۷) چون $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \frac{\partial z^2}{\partial x} + \frac{\partial x^2}{\partial y} + \frac{\partial y^2}{\partial z} = 0$ ، پس $\iiint_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{F})\, dV$ صفر است، که Ω داخل سطح مورد نظر می‌باشد.

برای محاسبهٔ قسمت دوم مسأله، می‌بایستی انتگرال $\mathbf{F}$ را بر سطح خارجی S مجموعهٔ Ω حل کنیم (به شکل ۵.۲ توجه شود). برای این منظور به جای x^2+y^2 در کره، چون $z = x^2 + y^2$ مقدار z را قرار داده و به دست می‌آوریم $z + z^2 = 2$ یا $z = \frac{-1\pm 3}{2}$ اما z در شکل ما همواره مثبت است، در نتیجه $z = 1$ مورد قبول است. یعنی، تصویر لبهٔ بیرونی شکل مورد نظر بر صفحهٔ xOy عبارت است از $x^2+y^2 = 1$. در نتیجه، تصویر کل آن عبارت است از $D : x^2+y^2 \leq 1$. سپس رویه‌های سازنده سطح خارجی جسم مذکور را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} S_1 &: f_1 = x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0; z \geq 0; (x,y) \in D \\ S_2 &: f_2 = x^2 + y^2 - z = 0; (x,y) \in D \end{aligned}$$

در S_1 بردار قائم $\mathbf{n}_1$ روبه بالا است (یعنی، مؤلفهٔ z اش مثبت است) و در S_2 بردار قائم $\mathbf{n}_2$ رو به پایین است. در نتیجه

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}_1 &= \pm\frac{\nabla f_1}{\|\nabla f_1\|} = \pm\frac{\overrightarrow{(2x, 2y, 2z)}}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}} \\
&= \pm\frac{\overrightarrow{\left(2x, 2y, 2\sqrt{2-x^2-y^2}\right)}}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{\left(x, y, \sqrt{2-x^2-y^2}\right)}
\end{aligned}$$

که حالت $+$ مورد قبول است. به علاوه

$$\mathbf{n}_2 = \pm\frac{\nabla f_2}{\|\nabla f_2\|} = \pm\frac{\overrightarrow{(2x, 2y, -1)}}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}$$

که حالت $+$ مورد قبول است، زیرا باید مؤلفهٔ z منفی باشد. همچنین

$$\begin{aligned}
d\sigma_1 &= \frac{\|\nabla f_1\|}{|\frac{\partial f_1}{\partial z}|}dxdy \\
&= \frac{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}{|2z|}dxdy = \frac{\sqrt{2}\,dxdy}{\sqrt{2-x^2-y^2}} \\
d\sigma_2 &= \frac{\|\nabla f_2\|}{|\frac{\partial f_2}{\partial z}|}dxdy \\
&= \frac{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}{|-1|}dxdy = \sqrt{4x^2+4y^2+1}\,dxdy
\end{aligned}$$

بنابراین $\iint_{(S_1)} \mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma$ برابر است با

$$\begin{aligned}
&\iint_D \overrightarrow{\left(z^2, x^2, y^2\right)}\bullet\overrightarrow{\left(x, y, \sqrt{2-x^2-y^2}\right)}\frac{dxdy}{\sqrt{2-x^2-y^2}} = \\
&= \iint_D \frac{z^2x+x^2y+y^2\sqrt{2-x^2-y^2}}{\sqrt{2-x^2-y^2}}dxdy \\
&= \iint_D \left(x\sqrt{2-x^2-y^2}+\frac{x^2y}{\sqrt{2-x^2-y^2}}+y^2\right)dxdy \\
&= \iint_D x\sqrt{2-x^2-y^2}\,dxdy
\end{aligned}$$

$$+\iint\limits_{D}\frac{x^{۲}y}{\sqrt{۲-x^{۲}-y^{۲}}}\,dxdy+\iint\limits_{D}y^{۲}dxdy$$

$$\overset{(۱)}{=}\quad ۰+۰+\int_{۰}^{۲\pi}\left[\int_{۰}^{۱}r^{۲}\sin^{۲}\theta r dr\right]d\theta=\int_{۰}^{۲\pi}\left[\frac{r^{۴}}{۴}\right]_{۰}^{۱}\sin^{۲}\theta d\theta$$

$$=\quad\frac{۱}{۴}\int_{۰}^{۲\pi}\frac{۱-\cos ۲\theta}{۲}d\theta=\frac{۱}{۴}\left[\frac{\theta}{۲}-\frac{\sin ۲\theta}{۴}\right]_{۰}^{۲\pi}=\frac{\pi}{۴}$$

که در تساوی (۱) از این واقعیت استفاده کرده‌ایم که توابع دو انتگرال موجود در سمت چپ نست به تغییر $(x,y)\longmapsto(-x,-y)$ فرد هستند و D نسبت به این تغییر پایا است، پس هر دو صفرند. در ادامه از تغییر متغیر قطبی استفاده کرده‌ایم. به صورت مشابه، داریم

$$\begin{aligned}\iint\limits_{(S_{۲})}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma &= \iint\limits_{D}\overrightarrow{\left(z^{۲},x^{۲},y^{۲}\right)}\cdot\overrightarrow{(۲x,۲y,-۱)}\\ &= \iint\limits_{D}\left(۲xz^{۲}+۲yx^{۲}-y^{۲}\right)dxdy\\ &= \iint\limits_{D}\left(۲x\left(x^{۲}+y^{۲}\right)^{۲}+۲x^{۲}y-y^{۲}\right)dxdy\\ &= ۲\iint\limits_{D}\left(x\left(x^{۲}+y^{۲}\right)^{۲}+x^{۲}y\right)dxdy-\iint\limits_{D}y^{۲}dxdy\\ &\overset{(۲)}{=} ۰-\iint\limits_{D}y^{۲}\,dxdy\overset{(۳)}{=}-\frac{\pi}{۴}\end{aligned}$$

توضیح اینکه در تساوی (۲) از فرد بودن تابع انتگرال اول و تقارن D استفاده کرده‌ایم و در تساوی (۳) از محاسبات انجام شده در قسمت بالا بهره برده‌ایم.

پاسخ مسأله ۸) فرض کنیم $S\ :\ z=x+y;\ (x,y)\in D$ که $D:x^{۲}+y^{۲}\leq a^{۲}$ و $\mathbf{n}$ را رو به بالا می‌گیریم. پس اگر فرض کنیم $f=x+y-z$ آنگاه

$$\mathbf{n}=\pm\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}=\pm\frac{\overrightarrow{(۱,۱,-۱)}}{\sqrt{۱+۱+۱}}=\pm\overrightarrow{\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳},\frac{\sqrt{۳}}{۳},-\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)}$$

که حالت $-$ مورد قبول است. به علاوه

$$d\sigma=\frac{\|\nabla f\|}{|\frac{\partial f}{\partial z}|}dxdy=\frac{\sqrt{۳}}{|-۱|}dxdy=\sqrt{۳}\,dxdy$$

و بنابه تعریف

$$\operatorname{Curl}(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x & x+y & x+y+z \end{vmatrix} = \overrightarrow{(۱-۰, ۰-۱, ۱-۰)}$$

بنابراین،

$$\begin{aligned}
\oint \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} &= \iint_{(S)} \operatorname{Curl}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}\, d\sigma \\
&= \iint_{D} \overrightarrow{(۱,-۱,۱)} \bullet \overrightarrow{\left(\frac{-\sqrt{۳}}{۳}, \frac{-\sqrt{۳}}{۳}, \frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)} \sqrt{۳}\, dxdy \\
&= \iint_{D} \overrightarrow{\left(-\frac{\sqrt{۳}}{۳} + \frac{\sqrt{۳}}{۳} + \frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)} \sqrt{۳}\, dxdy = \iint_{D} dxdy \\
&= \operatorname{Area}(D) = \left(\pi \times a^{۲}\right) = \pi a^{۲}
\end{aligned}$$

۴.۲ امتحان چهارم

صورت مسایل

۱) معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که با خط $\frac{x}{۲} = \frac{y}{-۱} = \frac{z-۱}{-۲}$ موازی و از فصل مشترک صفحات $x+y-z=۰$ و $x-y+z+۱=۰$ بگذرد.

۲) در وجود و یا در عدم وجود اکسترموم‌های تابع $z = ۴x^۳ - ۳xy^۲ + y^۲ + y$ بحث کنید.

۳) در مشتق‌پذیری یا عدم مشتق‌پذیری تابع زیر بحث کنید:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^۲ y}{x^۳+y^۳} & (x,y) \neq (۰,۰) \\ ۰ & (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$$

۴) هرگاه D ناحیهٔ محصور بین خطوط $y=x$، $y=x-۱$، $x+۲y=۰$ و $x+۲y=۱$ باشد، آنگاه $\iint_D \frac{x+۲y}{\cos(x-y)}\,dxdy$ را محاسبه کنید.

۵) حجم جسم صلبی که از پائین به صفحهٔ xOy و از بالا به سهمیگون $z = x^۲+y^۲$ و از اطراف به هذلولیگون یکپارچه $x^۲+y^۲ = z^۲/۴ + ۱$ محصور شده است را بیابید.

۶) انتگرال خط تابع برداری $\mathbf{F} = (x+y)\,\mathbf{i} + (y-z)\,\mathbf{j} + (x-z)\,\mathbf{k}$ را بر روی مرزناحیه $\left\{ \begin{array}{l} z = x^۲+y^۲ \\ z = ۴ \end{array} \right.$ به کمک قضیهٔ استوکس محاسبه کنید.

۷) هرگاه $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + y\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ و S سطح خارجی کره‌ای به شعاع یک باشد، آنگاه انتگرال سطح $\iint_{(S)} \mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma$ را به کمک قضیهٔ دیورژانس محاسبه کنید.

حل مسایل

پاسخ مسألهٔ ۱) معادلهٔ دسته صفحه‌هایی که از فصل مشترک دو صفحهٔ مذکور می‌گذرند، عبارت از ترکیب خطی معادلات این دو صفحه است، یعنی به ازای عدد دلخواه α

داریم $(x+y-z)+\alpha\,(x-y+z+۱)=۰$ و یا اینکه $(۱+\alpha)\,x+(۱-\alpha)\,y+(\alpha-۱)\,z=-\alpha$. پس بردار قائم بر صفحهٔ خواسته شده برابر $\mathbf{n}=(۱+\alpha,۱-\alpha,\alpha-۱)$ است. اما فرض شده است که این صفحه با خط داده شده موازی است، بنابراین بایستی $\mathbf{n}$ عمود بر بردار هادی خط $\mathbf{v}=(۲,-۱,-۲)$ باشد. پس $\mathbf{n}\bullet\mathbf{v}=۰$ یا $۲\,(۱+\alpha)-(۱-\alpha)-۲\,(\alpha-۱)=۰$. در نتیجه $\alpha=-۳$ و معادلهٔ صفحهٔ خواسته شده عبارت از $-۲x+۴y-۴z=۳$ است.

پاسخ مسأله ۲) ابتدا نقاط تکین تابع z را می‌یابیم. از برابر صفر قرار دادن گرادیان $\nabla z=\left(۱۲x^۲-۳y^۲,-۶xy+۲y+۱\right)$، به دست می‌آوریم

$$(۱)\quad ۱۲x^۲-۳y^۲=۰,\qquad\qquad (۲)\quad -۶xy+۲y+۱=۰\,\bullet$$

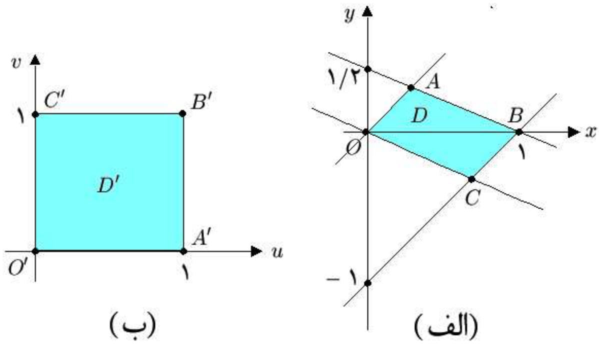
از معادلهٔ (۱) داریم $y^۲=۴x^۲$ یا $y=\pm۲x$. سپس، از معادلهٔ (۲) نتیجه می‌گیریم که $\pm۳y^۲+۲y+۱=۰$، اما برای حالت $+$، دلتا برابر $۴-۱۲<۰$ و برای حالت $-$ دلتا برابر $۱۶=۱۲+۴$ است. پس حالت $-$ مورد قبول است. در نتیجه، بایستی $-۳y^۲+۲y+۱=۰$، یا $y=\frac{-۲\pm\sqrt{۱۶}}{-۶}$ و بنابراین $y=۱$ یا $y=-۱/۳$. اما اگر $y=۱$ آنگاه $۲x=۱$ و $x=۱/۲$ و اگر $y=-۱/۳$ آنگاه $۲x=-۱/۳$ و $x=-۱/۶$. پس نقاط تکین این تابع عبارتند از $X_۱=(۱/۲,۱)$ و $X_۲\,(-۱/۶,-۱/۳)$. به علاوه

$$A=\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲}|_{X_۱}=۱۲\qquad B=\frac{\partial^۲ z}{\partial x\partial y}|_{X_۱}=-۶y|_{x_۱}=-۶$$
$$C=\frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲}|_{x_۱}=(۲-۶x)\,\big|_{X_۱}=-۱\qquad D=AC-B^۲=-۴۸$$

چون $D<۰$، نقطهٔ $X_۱$ یک نقطهٔ زینی است. به صورت مشابه برای نقطهٔ $X_۲$ داریم $A=-۴$، $B=۲$، $C=۳$ و $D=-۱۶$. پس چون $D<۰$، پس نقطهٔ $X_۲$ نیز یک نقطهٔ زینی است.

پاسخ مسأله ۳) برای مشتق‌پذیری یک تابع، لازم است که تابع پیوسته باشد. پس می‌پرسیم که آیا f در $(۰,۰)$ پیوسته است؟ برای پاسخ به این مسأله مسیر $C_\alpha(t)=(t,\alpha)$ گذرنده از مبداء را در نظر می‌گیریم که در آن α عددی دلخواه است. در این صورت حد f بر مسیر C_α برابر است با

$$\lim_{t\to ۰} f\left(C_\alpha(t)\right)=\lim_{t\to ۰}\frac{(t)^۲\,(\alpha t)}{(t)^۳+(\alpha t)^۳}=\frac{\alpha}{۱+\alpha^۳}$$



شکل ۶.۲: پاسخ مسألهٔ ۴ از امتحان چهارم

که چون به α بستگی دارد، پس f در $(0,0)$ حد ندارد و لذا نمی‌تواند مشتق‌پذیر باشد.

پاسخ مسأله ۴) ابتدا چهار خط داده شده را ترسیم می‌کنیم. برای این منظور کافی است که از هر خط دو نقطه رسم شود و سپس خطی از آنها گذرانده شود. مثلاً برای خط $x+2y=0$ اگر فرض کنیم $x=0$، آنگاه $y=0$ و اگر فرض کنیم $x=2$ آنگاه $y=-1$. سپس نقاط $(0,0)$ و $(2,-1)$ را رسم می‌کنیم و خطی از آنها می‌گذرانیم. (به شکل ۶.۲—(الف) توجه شود) محل تلاقی خط $x=y$ و $x+2y=1$ به این صورت به دست می‌آید که این معادله را به طور همزمان حل می‌کنیم: $x+2x=1$ یا $x=1/3$. بنابراین $y=x=1/3$ و نقطهٔ مشترک $A=(1/3,1/3)$ است. نقاط $O=(0,0)$، $B=(1,0)$ و $C=(2/3,-1/3)$.

اکنون تغییر متغیر $u=x+2y$ و $v=x-y$ را اعمال می‌کنیم. چون تبدیل $(x,y)\longmapsto(u,v)$ خطی است. پس تصویر هر خط، یک خط است و لذا کافی است رئوس چهار ضلعی مذکور را تصویر کرده و سپس به ترتیب به هم وصل کنیم:

نقطه	x	y	u	v	تصویر نقطه
A	$1/3$	$1/3$	1	0	A'
B	1	0	1	1	B'
C	$2/3$	$-1/3$	0	1	C'
O	0	0	0	0	O'

آنگاه، نقاط بدست آمده را در صفحهٔ Ouv ترسیم می‌کنیم (به شکل ۶.۲—(ب) توجه شود). بنابراین تصویر D در صفحهٔ Ouv را به صورت

$$D'=\{(u,v)\,|\,0\le u\le 1,\ 0\le u\le 1\}$$

می‌شود نوشت. از طرفی

$$|\frac{\partial(x,y)}{\partial\,(u,v)}| = \frac{۱}{|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}|} = \frac{۱}{|\det\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}|} = \frac{۱}{|-۳|} = \frac{۱}{۳}$$

در نتیجه،

$$\iint\limits_D \frac{x+۲y}{\cos\,(x-y)}\,dxdy = \iint\limits_{D'} \frac{u}{\cos v}\frac{۱}{۳}\,dudv$$

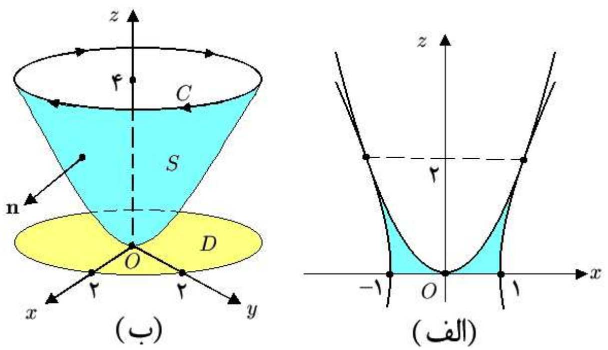
$$= \int_۰^۱ \left[\int_۰^۱ \frac{u\,du}{۳\cos v}\right] du = \frac{۱}{۳}\left(\int_۰^۱ u\,du\right)\left(\int_۰^۱ \frac{dv}{\cos v}\right)$$

$$= \frac{۱}{۳}\left[\frac{u^۲}{۲}\right]_۰^۱ \left[\ln|\tan\left(\frac{\pi}{۴}+\frac{v}{۲}\right)|\right]_۰^۱ = \frac{۱}{۶}\ln|\tan\frac{\pi+۲}{\pi}|$$

توضیح شود که در برای حل انتگرال دوم از تغییر متغیر تانژانت نصف قوس استفاده کرده‌ایم.

پاسخ مسألهٔ ۵) به دلیل اینکه رویه‌های مطرح شده در مسألهٔ همگی نسبت به محور z ها متقارن هستند (یعنی با عمل $x \mapsto -x$ و یا $y \mapsto -y$ عوض نمی‌شوند) کافی است شکل را در صفحهٔ xOz ترسیم کرده و برای تجسم شکل اصلی، دوران یافتهٔ این شکل حول محور z ها را در نظر بگیریم. در این صفحه با سهمی $z = x^۲$ (مقطع $z = x^۲+y^۲$ با صفحهٔ xOz) هذلولی $z^۲ = ۴x^۲-۴$ (مقطع $z^۲/۴+۱ = x^۲+y^۲$ با صفحهٔ xOz) و خط $x = ۰$ (مقطع $z = ۰$ با صفحهٔ xOz) مواجه هستیم. (به شکل ۷.۲—(الف) توجه شود). سهمی و هذلولی یکدیگر را در $\begin{cases} z = x^۲ \\ z^۲ = ۴x^۲-۴ \end{cases}$ یا $z^۲ = ۴x-۴$ قطع می‌کنند، پس $z = ۲$. در این حالت $x = \sqrt{۲}$ و چون $\left(\sqrt{۴x^۲-۴}\right)'|_{x=\sqrt{۲}} = ۲\sqrt{۲}$ نتیجه می‌گیریم که دو منحنی مذکور در نقطهٔ $\left(\sqrt{۲},۲\right)$ مماسند (به شکل ۷.۲—(الف) توجه شود). حال از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. چون شکل نسبت به محور z ها متقارن است، پس $۰ \leq \theta \leq ۲\pi$. از طرفی $۰ \leq z \leq ۲$ و اگر z ای را ثابت فرض کنیم، آنگاه r باید چنان باشد که از سطح سهمیگون تا سطح هذلولی تغییر کند، یعنی از $z = r^۲$ تا $z^۲/۴+۱ = r^۲$ یا به بیان دیگر از $r = \sqrt{z}$ تا $r = \sqrt{۱+z^۲/۴}$.
بنابراین تصویر حجم مذکور V در فضای $Or\theta z$ عبارت است از

$$V' = \left\{(r,\theta,z)\,|\,۰ \leq \theta \leq ۲\pi,\ ۰ \leq z \leq ۲, \sqrt{z} \leq r \leq \sqrt{۱+\frac{z^۲}{۴}}\right\}$$



شکل ۷.۲: (الف) مسألهٔ ۵ از امتحان چهارم (ب) مسألهٔ ٦ از امتحان چهارم

و در نتیجه

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}\,(V) &= \iiint_V dxdydz = \iiint_{V'} r\,drd\theta dz \\
&= \int_۰^{۲\pi}\left[\int_۰^۲\left[\int_{\sqrt{z}}^{\sqrt{۱+z^۲/۴}} rdr\right]dz\right]d\theta \\
&= \int_۰^{۲\pi}\left[\int_۰^۲\left[\frac{r^۲}{۲}\right]_{\sqrt{z}}^{\sqrt{۱+z^۲/۴}} dz\right]d\theta \\
&= \int_۰^{۲\pi}\left[\frac{۱}{۲}\int_۰^۲\left(۱+\frac{z^۲}{۴}-z\right)dz\right]d\theta \\
&= \frac{۱}{۲}\int_۰^{۲\pi}\left[z+\frac{z^۲}{۱۲}-\frac{z^۲}{۲}\right]_۰^۲ d\theta = \frac{۱}{۲}\int_۰^{۲\pi}\frac{۲}{۳}\,d\theta = \frac{۲\pi}{۳}
\end{aligned}$$

پاسخ مسأله ٦) رویه مورد نظر را به صورت

$$S\,:\,f = x^۲+y^۲-z = ۰;(x,y)\in D$$

می‌شود مطرح کرد، که در آن $D : x^۲+y^۲ \leq ۴$ (زیرا مقطع $z=۴$ و $x^۲+y^۲=z$ عبارت از $x^۲+y^۲=۴$ است). ضمناً $\mathbf{n}$ رو به پایین است (مؤلفهٔ z آن منفی است). (شکل ۷.۲—(ب)). از طرفی

$$\mathrm{Curl}\,(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x-y & y-z & x-z \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \overrightarrow{(۰+۱, ۰-۱, ۰+۱)} = \overrightarrow{(۱, -۱, ۱)} \\ \mathbf{n} &= \pm\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \pm\frac{\overrightarrow{(۲x, ۲y, -۱)}}{\sqrt{۴x^۲+۴y^۲+۱}} \end{aligned}$$

که حالت + مورد قبول است، به علاوه

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{\|\nabla f\|}{|\frac{\partial f}{\partial z}|}\,dxdy = \frac{\sqrt{۴x^۲+۴y^۲+۱}}{|-۱|}\,dxdy \\ &= \sqrt{۴x^۲+۴y^۲+۱}\,dxdy \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} &= \iint_{(S)} \mathrm{Curl}\,(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}\, d\sigma = \iint_D \overrightarrow{(۱, -۱, ۱)} \bullet \overrightarrow{(۲x, ۲y, -۱)}\, dxdy \\ &= \iint_D (۲x - ۲y - ۱)\ dxdy = ۲\iint_D (x-y)\ dxdy - \iint_D dxdy \\ &\overset{(۱)}{=} ۰ - \mathrm{Area}\,(D) = ۰ - \pi \times (۲)^۲ = -۴\pi \end{aligned}$$

توضیح اینکه در تساوی اول، انتگرال اول موجود در سمت چپ تساوی، انتگرالی از یک تابع فرد بر دامنه‌ای متقارن است.

پاسخ مسأله ۷) معادلهٔ کرهٔ مذکور عبارت است از $S\ :\ x^۲+y^۲+z^۲=۱$ از طرفی

$$\mathrm{div}\,(\mathbf{F}) = \nabla \bullet \mathbf{F} = \frac{\partial\,(z)}{\partial x} + \frac{\partial\,(y)}{\partial y} + \frac{\partial (x)}{\partial z} = ۰ + ۱ + ۰ = ۱$$

پس اگر V داخل S باشد، داریم

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, d\sigma &= \iiint_V \mathrm{div}\,(\mathbf{F})\ dxdydz = \iiint_V dxdydz \\ &= \mathrm{Vol}\,(V) = \frac{۴}{۳}\pi \times (۱)^۳ = \frac{۴}{۳}\pi \end{aligned}$$

۵.۲ امتحان پنجم

صورت مسایل

۱) معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که دو خط زیر را شامل شود:

$$\ell_۲ \begin{cases} x + ۲y - z = -۲ \\ ۳x + ۲y + ۲z = ۷ \end{cases} \qquad \ell_۱ : \begin{cases} x = ۱ + ۶t \\ y = ۳ - ۵t \\ z = ۲ - ۴t \end{cases}$$

۲) خمی به معادلهٔ $\mathbf{r}(t) = ۳\sin t\mathbf{i} + ۳\cos t\mathbf{j} + ۴t\mathbf{k}$ مفروض است، بردارهای $\mathbf{T}$، $\mathbf{N}$ و $\mathbf{B}$ و مقدار انحناء را در هر نقطهٔ دلخواه از آن بیابید.

۳) در پیوستگی یا عدم پیوستگی تابع
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^۴+y^۴}} & (x,y) \neq (۰,۰) \\ ۰ & (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$$
در کل فضای $\mathbb{R}^۲$ بحث کنید.

۴) اگر x و y متغیرهای مستقل باشند و $\begin{cases} u^۳ + v^۳ + x^۵ + ۴y^۵ = ۱۰ \\ u^۲ + v^۲ + x^۹ + y^۸ = ۱۱ \end{cases}$، آنگاه مطلوب است محاسبه v_y و u_x.

۵) مطلوب است $\iint_R e^{-\left(x^۲/a^۲+y^۲/b^۲\right)}\,dxdy$ که در آن R ناحیهٔ داخل بیضی به معادلهٔ $x^۲/a^۲ + y^۲/b^۲ = ۱$ است.

۶) حجم جسم صلب محصور بین سطوح $x^۲+y^۲+z^۲ = a^۲$، $x^۲+y^۲+z^۲ = b^۲$ و $z = \sqrt{x^۲+y^۲}$ را بیابید $(a < b)$.

۷) مساحت سطح جدا شده از مخروط $z^۲ = x^۲ + y^۲$ بوسیلهٔ صفحات $z = ۱$ و $z = ۲$ را به دست آورید.

۸) انتگرال خط $\int_{(۱,۲,۳)}^{(۶,۱,۱)} yzdx + xzdy + xydz$ را محاسبه کنید.

۹) درستی قضیهٔ دیورژانس را برای سطح S خارج جسم محدود به صفحات $x + y + z = ۱$، $x = ۰$، $y = ۰$ و $z = ۰$ و میدان برداری $\mathbf{F} = (x+y)\,\mathbf{i} + (y+z)\,\mathbf{j} + (z+x)\,\mathbf{k}$ تحقیق کنید.

حل مسایل

پاسخ مسأله ۱) کافی است سه نقطه از صفحهٔ مجهول را در اختیار داشته باشیم. اگر در $\ell_۲$ مقدار پارامتر t را صفر بگیریم به $X_۱ = (۱,۲,۳)$ می‌رسیم و اگر آن را برابر یک بگیریم به نقطهٔ $X_۲ = (۷,-۲,-۲)$ خواهیم رسید. برای یافتن نقطهٔ بعدی (چون باید سه نقطهٔ غیر همخط داشته باشیم) دستگاه معرف خط $\ell_۲$ را حل می‌کنیم. از معادلهٔ اول داریم $z = x + ۲y + ۲$ و با قرار دادن این در معادلهٔ دوم داریم $۵x + ۶y = ۳$ یا $y = \frac{۳-۵x}{۶}$. به علاوه $z = x + ۲y + ۲$، پس $z = x + ۲\frac{۳-۵x}{۶} + ۲$ یا $z = \frac{۹-۲x}{۳}$. یعنی $\ell_۲$ عبارت از نقاط به شکل (x,y,z) است که $y = \frac{۳-۵x}{۶}$ و $z = \frac{۹-۲x}{۳}$. اگر فرض کنیم $x = ۳$، آنگاه $y = -۲$ و $z = ۱$. پس $X_۳ = (۳,-۲,۱)$ بر خط $\ell_۲$ و بنابراین آن صفحه واقع است. بنابراین معادلهٔ صفحهٔ مورد نظر عبارت است از $(X - X_۳) \bullet ((X_۱ - X_۳) \times (X_۲ - X_۳)) = ۰$ یا به بیان دیگر

$$\begin{vmatrix} x-۳ & y+۲ & z-۱ \\ ۱-۳ & ۳+۲ & ۲-۱ \\ ۷-۳ & -۲+۲ & -۲-۱ \end{vmatrix} = ۰$$

بنابراین $-۱۵(x-۳) - ۲(y+۲) - ۲۰(z-۱) = ۰$، یا $۱۵x + ۲y + ۲۰z = ۶۱$.

پاسخ مسأله ۲) ابتدا مشتقات اول تا سوم $\mathbf{r}(t)$ را محاسبه می‌کنیم

$$\mathbf{r}'(t) = \overrightarrow{(۳\cos t, -۳\sin t, ۴)} \quad , \quad \mathbf{r}''(t) = \overrightarrow{(-۳\sin t, -۳\cos t, ۰)}$$
$$\mathbf{r}'''(t) = \overrightarrow{(-۳\cos t, ۳\sin t, ۰)}$$

به علاوه

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۳\cos t & -۳\sin t & ۴ \\ -۳\sin t & -۳\cos t & ۰ \end{vmatrix} = \overrightarrow{(۱۲\cos t, -۱۲\sin t, -۹)}$$
$$||\mathbf{r}'(t)|| = \sqrt{۹\cos^۲ t + ۹\sin^۲ t + ۱۶} = \sqrt{۹+۱۶} = ۵$$
$$||\mathbf{r}''(t)|| = \sqrt{۹\sin^۲ t + ۹\cos^۲ t + ۰} = \sqrt{۹} = ۳$$
$$||\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|| = \sqrt{۱۴۴\cos^۲ t + ۱۴۴\sin^۲ t + ۸۱} = \sqrt{۲۲۵} = ۱۵$$

در نتیجه

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}(t)'}{||\mathbf{r}(t)'||} = \frac{۱}{۵}\overrightarrow{(۳\cos t, -۳\sin t, ۴)} = \overrightarrow{\left(\frac{۳}{۵}\cos t, \frac{-۳}{۵}\sin t, \frac{۴}{۵}\right)}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B}(t) &= \frac{\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)\|} = \frac{1}{15}\overrightarrow{(12\cos t, -12\sin t, -9)}\\
&= \overrightarrow{\left(\frac{4}{5}\cos t, \frac{-4}{5}\sin t, \frac{-3}{5}\right)}\\
\mathbf{N}(t) &= \mathbf{B}(t)\times\mathbf{T}(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{4}{5}\cos t & \frac{-4}{5}\sin t & \frac{-3}{5}\\ \frac{3}{5}\cos t & \frac{-3}{5}\sin t & \frac{4}{5}\end{vmatrix} = \overrightarrow{(-\sin t, -\cos t, 0)}\\
\kappa(t) &= \frac{\|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3} = \frac{15}{5^3} = \frac{3}{25}
\end{aligned}
$$

پاسخ مسأله ۳) اگر $X_0 \neq (0,0)$ آنگاه f در یک همسایگی از X_0 به صورت $\frac{xy}{\sqrt{x^4+y^4}}$ تعریف می‌شود، که خارج قسمتی از دو تابع پیوسته است و چون مخرج در X_0 صفر نمی‌شود، تابع $\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ و لذا خود f در X_0 پیوسته است. اما f در $X_0 = (0,0)$ ناپیوسته است زیرا حد f در $(0,0)$ موجود نیست. دلیل این امر آن است که اگر مسیر $\mathbf{r}_\alpha(t) = \overrightarrow{(t,\alpha t)}$ را انتخاب کنیم، آنگاه حد f بر مسیر $\mathbf{r}_\alpha$ (که به $(0,0)$ منتهی است) برابر است با

$$\lim_{t\to 0} f(\mathbf{r}_\alpha(t)) = \lim_{t\to 0}\frac{(t)(\alpha t)}{\sqrt{t^4+\alpha^4 t^4}} = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^4}}$$

که به انتخاب مسیر بستگی دارد. در نتیجه، f در کل $\mathbb{R}^2$ به جز مبداء پیوسته است.

پاسخ مسأله ۴) برای به دست آوردن v_y از طرفین معادلات داده شده نسبت به y مشتق می‌گیریم، به این ترتیب به دستگاهی با دو معادله از مجهولات u_y و v_y می‌رسیم. اکنون کافی است که این دستگاه را بر حسب v_y حل کنیم:

$$\begin{cases} 3u^2u_y + 3v^2v_y + 0 + 20y^4 = 0\\ 2uu_v + 2vv_y + 0 + 8y^2 = 0\end{cases}$$

اگر معادله خط اول را در ۲ و معادله خط دوم را در $-3u$ ضرب کرده و سپس آن دو را با هم جمع کنیم، آنگاه به معادلهٔ $\left(6v^2-6uv\right)v_y + 40y^2 - 24y^7u = 0$ می‌رسیم، و با توجه به آن داریم $v_y = \dfrac{24y^7u-40y^4}{6v^2-6uv}$. به صورت مشابه، برای حصول به u_x از طرفین معادلات داده شده نسبت به x مشتق گرفته و دستگاه را بر حسب u_x حل کنیم:

$$\begin{cases} 3u^2u_x + 3v^2v_x + 5x^4 + 0 = 0\\ 2uu_x + 2vv_x + 9x^8 + 0 = 0\end{cases}$$

پس $۰ = ۲۷vx^۴ - ۱۰x^۴ + u_x(۶u^۲ - ۶uv)$ یا $u_x = \frac{۲۷vx^۸ - ۱۰x^۴}{۶u^۲ - ۶uv}$.

پاسخ مسأله ۵) مشکل دامنه و تابع یکی است! در مخرج $x^۲$ عدد $a^۲$ و در مخرج $y^۲$ عدد $b^۲$ وجود دارد. برای رفع این مشکل از تغییر مختصات $u = x/a$ و $v = y/b$ استفاده می‌کنیم. به این ترتیب، عبارت $x^۲/a^۲ + y^۲/b^۲$ به $u^۲ + v^۲$ تبدیل می‌شود، پس چون

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\det\begin{bmatrix} a & ۰ \\ ۰ & b\end{bmatrix}\right| = |ab|$$

و نیز تصویر $R : x^۲/a^۲ + y^۲/b^۲ \leq ۱$ در صفحهٔ uOv عبارت از $R' : u^۲ + v^۲ \leq ۱$ است، داریم

$$\iint_R e^{-\left(x^۲/a^۲+y^۲/b^۲\right)}\,dxdy = \iint_{R'} e^{-\left(u^۲+v^۲\right)}|ab|dudv$$

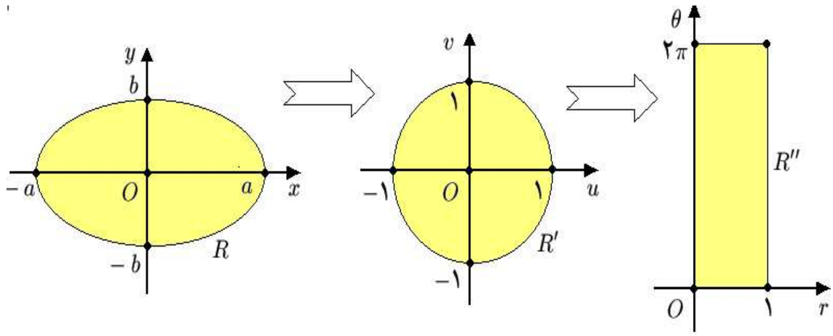
اکنون از مختصات استاندارد قطبی در صفحهٔ uOv استفاده می‌کنیم: $u = r\cos\theta$ و $v = r\sin\theta$. در این صورت، تصویر R' در صفحهٔ $rO\theta$ عبارت از

$$R'' : ۰ \leq \theta \leq ۲\pi, ۰ \leq r \leq ۱$$

است و ژاکوبین v، u نسبت به θ، r برابر r می‌باشد، (به شکل ۸.۲ توجه شود). بنابراین

$$\begin{aligned}\iint_R e^{-\left(x^۲/a^۲+y^۲/b^۲\right)}\,dxdy &= |ab|\iint_{R''} e^{-r^۲}r\,drd\theta \\ &= |ab|\int_۰^{۲\pi}\left[\int_۰^۱ e^{-r^۲}r\,dr\right]d\theta = |ab|\int_۰^{۲\pi}\left[\frac{-۱}{۲}e^{-r^۲}\right]_۰^۱ d\theta \\ &= |ab|\int_۰^{۲\pi}\frac{-e^{-۱}+e^۰}{۲}\,d\theta = \frac{|ab|}{۲}\left(۱-\frac{۱}{e}\right)\times ۲\pi = |ab|\frac{e-۱}{e}\pi\end{aligned}$$

پاسخ مسأله ۶) معادلهٔ $x^۲ + y^۲ + z^۲ = a^۲$ کره‌ای به مرکز مبداء و شعاع a را معرفی می‌کند. معادلهٔ $x^۲ + y^۲ + z^۲ = b^۲$ کره‌ای به مرکز مبداء و شعاع b را معرفی می‌کند، که چون $a \leq b$، کره دوم کره اول را در بر دارد. معادلهٔ $z = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ نیمهٔ بالایی مخروط استاندارد است. به دلیل این که شکل نسبت به محور z ها متقارن است (یعنی، با تبدیل x به $-x$ و یا y به $-y$ تغییر نمی‌کند) کافی است آن را در صفحهٔ yOz رسم کرده و تصور کنیم که با دوران این شکل حول محور z ها، جسم مورد نظر

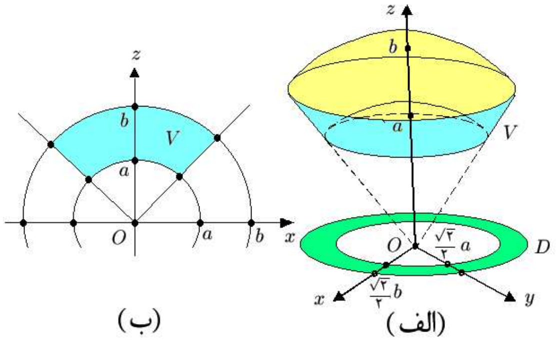


شکل ۸.۲: پاسخ مسألهٔ ۵ از امتحان پنجم

تولید می‌شود (به شکل ۹.۲—(الف) توجه شود). از مختصات کروی استفاده می‌کنیم. چون شکل نسبت به محور z ها متقارن است، پس $۰ \le \theta \le ۲\pi$ از سوی دیگر چون $\rho = \sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}$ و در شکل ما $a^۲ \le x^۲ + y^۲ + z^۲ \le b^۲$، پس در این صورت $a \le \rho \le b$. از طرف دیگر، اگر نقطهٔ M از شکل ۹.۲—(ب) بر مخروط واقع باشد، $\rho \sin\varphi = \sqrt{x^۲ + y^۲} = z = \rho\cos\varphi$ و لذا $\tan\varphi = ۱$؛ پس $\varphi = \pi/۴$. یعنی $۰ \le \varphi \le \pi/۴$. بنابراین، حجم خواسته شده برابر است با

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{V} dxdydz &= \iiint\limits_{V'} \rho^۲ \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta \\
&= \int_۰^{۲\pi} \left[\int_۰^{\pi/۴} \left[\int_a^b \rho^۲ \sin\varphi d\rho\right] d\varphi\right] d\theta \\
&= \left(\int_۰^{۲\pi} d\theta\right) \left(\int_۰^{\pi/۴} \sin\varphi d\varphi\right) \left(\int_a^b d\rho\right) \\
&= \Big[\theta\Big]_۰^{۲\pi} \Big[-\cos\varphi\Big]_{\pi/۴}^{۰} \left[\frac{\rho^۳}{۳}\right]_b^a \\
&= (۲\pi)\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲} - ۱\right)\left(\frac{a^۳}{۳} - \frac{b^۳}{۳}\right) = \frac{\pi}{۳}\left(۲ - \sqrt{۲}\right)\left(b^۳ - a^۳\right)
\end{aligned}$$

پاسخ مسأله ۷) مقطع صفحهٔ $z = ۱$ با مخروط، عبارت از دایرهٔ $C_۱ : z = ۱$ و $x^۲ + y^۲ = ۱$ است و تصویر آن بر صفحهٔ xOy عبارت از دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۱$ است. به صورت مشابه، فصل مشترک صفحهٔ $z = ۲$ با مخروط، عبارت از دایرهٔ $C_۲$ است که تصویرش بر صفحهٔ xOy دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۴$ است. بنابراین تصویر سطح مورد نظر بر



شکل ۹.۲: پاسخ مسألهٔ ٦ از امتحان پنجم

صفحهٔ xOy عبارت است از $D : ۱ \leq x^۲ + y^۲ \leq ۴$. اما، سطح مورد نظر را به صورت $(x,y) \in D$، $z \geq ۰$، $S \,:\, f = x^۲ + y^۲ - z^۲ = ۰$ می‌شود بیان کرد پس

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{\|\nabla f\|}{|\frac{\partial f}{\partial z}|}dxdy = \frac{\|\overrightarrow{(۲x, ۲y, -۲z)}\|}{|-۲z|}dxdy \\ &= \frac{۱}{۲z}\sqrt{۴x^۲ + ۴y^۲ + ۴z^۲}\, dxdy \\ &= \frac{۱}{۲\sqrt{x^۲ + y^۲}}\sqrt{۸x^۲ + ۸y^۲}\, dxdy = \sqrt{۲}\, dxdy \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \text{Area}(S) &= \iint_D d\sigma = \iint_D \sqrt{۲}\, dxdy = \sqrt{۲}\text{Area}\,(D) \\ &= \sqrt{۲}\left(\pi \times (۲)^۲ - \pi \times (۱)^۲\right) = ۳\sqrt{۲}\pi \end{aligned}$$

پاسخ مسأله ۸) به دلیل آنکه فقط ابتدا و انتهای مسیر داده شده است، طراح پذیرفته است که میدان برداری $\mathbf{F} = \overrightarrow{(yz, xz, xy)}$ کامل است. پتانسیل آن کدام است؟ اگر پاره‌خط $\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(tx, ty, tz)}$ با $۰ \leq t \leq ۱$ واصل میان مبداء و نقطهٔ ثابت (x,y,z) را در نظر بگیریم، آنوقت پتانسیل $\mathbf{F}$ عبارت است از

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \int_۰^۱ \left\{(ty)(tz)\; d(tx) + (tx)(tz)\; d(ty) + (tx)(ty)\; d(tz)\right\} \\ &= \int_۰^۱ \left\{۳xyzt^۲ dt\right\} = \left[xyzt^۳\right]_۰^۱ = xyz \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\int_{(۱,۲,۳)}^{(٦,۱,۱)} yzdx + xzdy + xydz = f\left(٦,۱,۱\right) - f\left(۱,۲,۳\right) = ٦ - ٦ = ۰$$

پاسخ مسألهٔ ۹) صفحهٔ $x+y+z=۱$ هر سه محور را به فاصله یک از مبداء قطع می‌کند، و فصل مشترکش با سه صفحهٔ مختصاتی $x=۰$، $y=۰$ و $z=۰$ به صورتی که در شکل ۱۰.۲ آمده است وجوه این شکل چهار سطح به شرح زیرند:

$$S_۱ \;:\; z = ۱ - x - y \;;\; D_۱ = \left\{(x,y)\middle|\, ۰ \le x \le ۱, ۰ \le y \le ۱ - x\right\}$$

$$S_۲ \;:\; z = ۰ \;;\; D_۲ = D_۱$$

$$S_۳ \;:\; x = ۰ \;;\; D_۳ = \left\{(y,z)\,\middle|\, ۰ \le y \le ۱, ۰ \le z \le ۱ - y\right\}$$

$$S_۴ \;:\; y = ۰ \;;\; D_۴ = \left\{(x,z)\,\middle|\, ۰ \le x \le ۱, ۰ \le z \le ۱ - x\right\}$$

برای سطح $S_۱$ معادلهٔ معرف $f = x + y + z - ۱ = ۰$ است، پس چون $\mathbf{n}$ رو به بالا (مؤلفهٔ z اش مثبت است)، داریم:

$$\mathbf{n}_۱ = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \frac{\overrightarrow{(۱,۱,۱)}}{\sqrt{۳}} \quad , \quad d\sigma_۱ = \frac{\|\nabla f\|}{\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|} dxdy = \sqrt{۳}\, dxdy$$

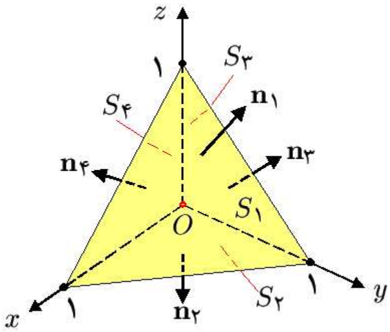
به صورت مشابه،

$$\mathbf{n}_۲ = \overrightarrow{(۰,۰,-۱)} \qquad \mathbf{n}_۳ = \overrightarrow{(-۱,۰,۰)} \qquad \mathbf{n}_۴ = \overrightarrow{(۰,-۱,۰)}$$

$$d\sigma_۲ = dxdy \qquad d\sigma_۳ = dydz \qquad d\sigma_۴ = dxdz$$

بنابراین،

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{S_۱} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, d\sigma &= \iint\limits_{D_۱} \overrightarrow{(x+y, y+z, z+x)} \bullet \overrightarrow{(۱,۱,۱)}\, dxdy \\
&= \iint\limits_{D_۱} ۲\left(x+y+z\right)\, dxdy = ۲ \iint\limits_{D_۱} dxdy = ۲\,\mathrm{Area}\left(D_۱\right) = ۱ \\
\iint\limits_{S_۲} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, d\sigma &= \iint\limits_{D_۲} \overrightarrow{(x+y, y+z, z+x)} \bullet \overrightarrow{(۰,۰,-۱)}\, dxdy \\
&= \iint\limits_{D_۲} -\left(z+x\right)\, dxdy = \iint\limits_{D_۲} -xdxdy
\end{aligned}$$



شکل ۲.۱۰: پاسخ مسألهٔ ۹ از امتحان پنجم

$$\begin{aligned} &= -\int_۰^۱ \left[\int_۰^{۱-x} x dy\right] dx = -\int_۰^۱ x\,(۱-x)\;dx \\ &= -\left[\frac{x^۲}{۲}-\frac{x^۳}{۳}\right]_۰^۱ = \frac{-۱}{۶} \end{aligned}$$

به دلیل تقارن موجود در مسأله (یعنی، با تعویض $y \mapsto x$، $z \mapsto y$ یا $x \mapsto z$ نه دامنه تغییر می‌کند و نه میدان برداری)، داریم

$$\iint_{(S_۳)} \mathbf{F} \bullet n\, d\sigma = \iint_{(S_۴)} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, d\sigma = \iint_{(S_۲)} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, d\sigma = \frac{-۱}{۶}$$

در نتیجه

$$\iint_{(S)} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, d\sigma = ۱ - \frac{۱}{۶} - \frac{۱}{۶} - \frac{۱}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

حال از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم. برای این منظور توجه داریم که

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \frac{\partial(x+y)}{\partial x} + \frac{\partial(y+z)}{\partial y} + \frac{\partial(z+x)}{\partial z} = ۳$$

بنابراین اگر V داخل S باشد، داریم

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, d\sigma &= \iiint_V \operatorname{div}(\mathbf{F})\; dxdydz = \iiint_V ۳dxdydz = ۳ \times \operatorname{Vol}(V) \\ &= ۳ \times \left(\frac{۱}{۳} \times ۱ \times \operatorname{Area}(D_۱)\right) = ۳ \times \left(\frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۲}\right) = \frac{۱}{۲} \end{aligned}$$

۶.۲ امتحان ششم

صورت مسایل

۱ — a) معادله صفحه‌ای را بنویسید که از نقطهٔ $(۱, -۱, ۰)$ و محل تقاطع دو صفحه به معادلات $x + y - z = -۱$ و $۲x - ۳y + z = ۲$ بگذرد.

۱ — b) نوع سطح $xyz = ۰$ را مشخص کنید.

۲) تابع پتانسیل تابع نیروی زیر را بیابید:
$\mathbf{F} = \left(۲ye^{۲x} + e^{z}\right) i + \left(۳ze^{۳y} + e^{۲x}\right) \mathbf{j} + \left(xe^{z} + e^{۳y}\right) \mathbf{k}$.

۳) هرگاه $h(x,y) = f\,(x + ۲y) + f\,(x - ۲y)$، مقدار عبارت $۴\dfrac{\partial^۲ h}{\partial x^۲} - \dfrac{\partial^۲ h}{\partial y^۲}$ را بیابید.

۴) در پیوستگی یا عدم پیوستگی تابع
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^۲+y^۲} & ; \quad (x,y) \neq (۰,۰) \\ ۰ & ; \quad (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$$
در نقطهٔ $(۰,۰)$ بحث کنید.

۵) گشتاور ماند نسبت به محور x یک ناحیه جرم‌دار محصور به بیضی به معادلهٔ $۹y^۲ + z^۲ = ۹$ را با فرض ثابت بودن تابع چگالی $(\delta = ۱)$ بیابید.

۶) انتگرال سه‌گانه تابع $f(x,y,z) = xyz$ را بر ناحیه R محصور بین استوانه‌های $x^۲ + y^۲ = ۴$ و $x^۲ + z^۲ = ۴$ را محاسبه کنید.

۷) انتگرال خط تابع $\mathbf{F} = \dfrac{-y}{x^۲ + y^۲}\mathbf{i} + \dfrac{x}{x^۲ + y^۲}\mathbf{j}$ را در طول دایرهٔ مثلثاتی محاسبه کنید. آیا انتگرال فوق را می‌توان به کمک قضیه گرین محاسبه نمود؟ چرا؟

۸) انتگرال خط $\displaystyle\int_C x\,(z - y)\; dx \,+\, y\,(x - z)\; dy \,+\, z\,(y - x)\; dz$ که در آن C مثلثی با رئوس $(۹,۰,۰)$، $(۰,۹,۰)$، $(۰,۰,۹)$ واقع بر صفحه‌ای به معادلهٔ $x + y + z = ۹$ است را به کمک قضیه استوکس محاسبه کنید.

۹) تابع برداری $\mathbf{F} = x^۲\mathbf{i} + y^۲\mathbf{j} + z^۲\mathbf{k}$ را در نظر می‌گیریم، انتگرال سطح این تابع را بر روی سطح بیضوی خارجی $x^۲ + y^۲/۴ + z^۲ = ۱$ به کمک قضیه گاوس (دیورژانس یا استروگرادسکی) محاسبه کنید.

حل مسایل

پاسخ مسأله ۱—a) از این صفحه سه نقطهٔ غیر واقع بر یک استقامت لازم است. یک نقطه از آنها، نقطهٔ مفروض $M_1 = (0, -1, 1)$ است. برای بدست آوردن دو نقطهٔ دیگر دستگاهی مرکب از دو معادلهٔ داده شده را حل می‌کنیم. از معادلهٔ صفحه $z = x + y + z$ و با قرار دادن آن در معادلهٔ دوم داریم $2x - 3y + x + y + 1 = 2$ یا $3x - 2y = 1$. بنابراین $y = \frac{3x-1}{2}$ و با قرار دادن این مقدار y در معادلهٔ اول بدست می‌آوریم $z = \frac{5x+1}{2}$. حال اگر x را (که می‌تواند هر عدد دلخواهی باشد) برابر یک بگیریم، بدست می‌آوریم $y = 1$ و $z = 3$؛ یعنی، $M_2 = (1, 1, 3)$. مشابه قبل، بازاء $x = -1$ داریم $y = -2$ و $z = -2$؛ یعنی؛ $M_3 = (-1, -2, -2)$. در نتیجه، معادله صفحهٔ مذکور عبارت است از $(X - M_1) \bullet \{(M_3 - M_1) \times (M_2 - M_1)\} = 0$ یا

$$\begin{vmatrix} x - 0 & y - (-1) & z - 1 \\ 1 - 0 & 1 - (-1) & 3 - 1 \\ -1 - 0 & -2 - (-1) & -2 - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y + 1 & z - 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

پس، $(-6 + 2)x + (-2 + 3)(y + 1) + (-1 + 2)(z - 1) = 0$ یا به عبارت دیگر $-4x + y + z = 0$.

پاسخ مسأله ۱—b) کافی است به محاسبات به شرح زیر، توجه کنیم

$$\begin{aligned} \{(x, y, z) | xyz = 0\} &= \{(x, y, z) | x = 0 \vee y = 0 \vee z = 0\} \\ &= \{(x, y, z) | x = 0\} \cup \{(x, y, z) | y = 0\} \cup \{(x, y, z) | z = 0\} \\ &= yOz \cup xOz \cup xOy \end{aligned}$$

یعنی شکل مورد نظر اجتماع سه صفحهٔ مختصاتی در فضای $Oxyz$ است.

پاسخ مسأله ۲) در اینجا، عبارت دیفرانسیلی نظیر F عبارت است از

$$\eta = \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \left(2ye^{2x} + e^z\right) dx + \left(3ze^{3y} + e^{2x}\right) dy + \left(xe^z + e^{3y}\right) dz$$

که در آن $P = 2ye^{2x} + e^z$، $Q = 3ze^{3y} + e^{2x}$ و $R = xe^z + e^{3y}$. ابتدا شرایط کنسرواتیو (=ابقایی) بودن را تحقیق می‌کنیم:

$$P_y = 2e^{2x} = Q_x \ \ , \ \ P_z = e^z = R_x \ \ , \ \ Q_z = 3e^{3y} = R_y$$

بنابراین $\mathbf{F}$ کنسرواتیو است. اکنون به منظور محاسبهٔ پتانسیل $\mathbf{F}$، پاره خط

$$C \ : \ \mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(tx, ty, tz)} \ ; \ \ 0 \le t \le 1$$

را در نظر می‌گیریم که درآن x، y و z اعدادی ثابتند. برای به دست آوردن پتانسیل $\mathbf{F}$ کافی است از $\mathbf{F}$ بر C انتگرال گیریم:

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= \int_C \mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma \\
&= \int_0^1 \Big\{\left(2\,(ty)\,e^{2tx}+e^{tz}\right)\,d\,(tx)+\left(3\,(tz)\,e^{3ty}+e^{2(tx)}\right)\,d\,(ty) \\
&\qquad +\left(1\,(tx)\,e^{tz}+e^{3ty}\right)\,d\,(tz)\Big\} \\
&= \int_0^1 \left\{2xyte^{2tx}+xe^{tz}+3zyte^{3ty}+ye^{2tx}+txze^{tz}+ze^{3ty}\right\}\,dt \\
&= \int_0^1 \left\{2xyte^{2tx}+ye^{2tx}\right\}\,dt+\int_0^1 \left\{3zyte^{3ty}+ze^{3ty}\right\}\,dt \\
&\qquad +\int_0^1 \left\{txze^{tz}+xe^{tz}\right\}\,dt \\
&= \left[tye^{2tx}\right]_0^1+\left[tze^{3ty}\right]_0^1+\left[txe^{tz}\right]_0^1 = ye^{2x}+ze^{3y}+xe^{z}
\end{aligned}$$

پاسخ مسأله ۳) فرض کنید $u=x+2y$ و $v=x-2y$ ، در این صورت بنا به قاعدهٔ زنجیره‌ای مشتق

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x}f'(u)+\frac{\partial v}{\partial x}f'(v)=f'(u)+f'(v) \\
\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)=\frac{\partial u}{\partial x}f''(u)+\frac{\partial v}{\partial x}f''(v)+f''(v) \\
\frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial y}f'(u)+\frac{\partial v}{\partial y}f'(v)=2f'(u)-2f'(v) \\
\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)=2\frac{\partial u}{\partial y}f''(u)-2\frac{\partial v}{\partial y}f''(v)=4f''(u)+4f''(v)
\end{aligned}$$

بنابراین، عبارت مورد نظر صفر است.

پاسخ مسأله ۴) اگر مسیرهای $\mathbf{r}_\alpha(t)=\overrightarrow{(t,\alpha t)}$ با $\alpha\in\mathbb{R}$ را در نظر بگیریم. آنگاه حد مسیری f بر مسیر $\mathbf{r}_\alpha$ منتهی به مبدأ برابر است با

$$\lim_{t\to 0} f\left(\mathbf{r}_\alpha(t)\right)=\lim_{t\to 0}\frac{(t)\,(\alpha t)}{(t)^2+(\alpha t)^2}=\frac{\alpha}{1+\alpha^2}$$

که چون به α بستگی دارد، پس حد f در $(\circ,\circ)$ $C_\alpha(\circ) = (\circ,\circ)$ موجود نیست؛ در نتیجه f در $(\circ,\circ)$ ناپیوسته است.

پاسخ مسألهٔ ۵) ناحیهٔ مورد بحث $D: ۹y^۲ + z^۲ \leq ۹$ در صفحهٔ yOz است و محور x ها به آن صفحه عمود است. پس گشتاور حول محور x ها به معنی گشتاور حول محل برخورد محور x ها با صفحهٔ yOz است. مطابق بحث‌های کلاسیک این گشتاور از فرمول زیر محاسبه می‌شود

$$I_\circ(D) = \iint\limits_D \left(y^۲ + z^۲\right)\delta(y,z)\,dydz$$

برای حل این انتگرال از تغییر متغیر $y = r\cos\theta$ و $z = ۳r\sin\theta$ استفاده می‌کنیم، تا با قرار دادن اینها در عبارت $۹y^۲ + z^۲$، به توان ضریب ۹ را فاکتور گرفت، این عبارت به صورت $۹r^۲$ در خواهد آمد. پس $۹r^۲ \leq ۹$ یا $\circ \leq r$. از طرفی به دلیل اینکه شرطی بر θ اعمال نشده است، پس $\circ \leq \theta \leq ۲\pi$. یعنی تصویر D در صفحهٔ $rO\theta$ عبارت است از $D' : \circ \leq \theta \leq ۲\pi$ ،$\circ \leq r \leq ۱$. از طرفی داریم

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(r,\theta)} = \det\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ ۳\sin\theta & ۳r\cos\theta \end{bmatrix} = ۳r$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}
I_\circ(D) &= \iint\limits_{D'} \left\{(r\cos\theta)^۲ + (۳r\sin\theta)^۲\right\} ۳r\,dr\,d\theta \\
&= ۳\int_\circ^{۲\pi}\left[\int_\circ^۱ r^۳\left(\cos^۲\theta + ۹\sin^۲\theta\right)dr\right]d\theta \\
&= ۳\left(\int_\circ^{۲\pi}\left(\cos^۲\theta + ۹\sin^۲\theta\right)d\theta\right)\left(\int_\circ^۱ r^۳\,dr\right) \\
&= ۳\left(\int_\circ^{۲\pi}\left\{\frac{۱+\cos ۲\theta}{۲} + ۹\,\frac{۱-\cos ۲\theta}{۲}\right\}d\theta\right) \times \left[\frac{r^۲}{۴}\right]_\circ^۱ \\
&= ۳\Big[۵\theta - ۲\sin ۲\theta\Big]_\circ^{۲\pi} \times \frac{۱}{۴} = \frac{۱۵}{۲}\pi
\end{aligned}$$

پاسخ مسأله ۶) اگر $x^۲ + z^۲ = ۴$ را بر حسب z حل کنیم، به دست می‌آوریم $z = \pm\sqrt{۴ - x^۲}$ که دامنهٔ این توابع به دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۴$ محدود است، یعنی ناحیهٔ انتگرال گیری عبارت است از

$$R = \left\{(x,y,z)\,\middle|\, -\sqrt{۴ - x^۲} \leq z \leq \sqrt{۴ - x^۲}, (x,y) \in D\right\}$$

که در آن $D = \left\{(x,y) \mid x^{۲} + y^{۲} \leq ۴\right\}$. بنابراین

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_R xyzdxdydz &= \iint\limits_D \left[\int_{-\sqrt{۴-x^{۲}}}^{\sqrt{۴-x^{۲}}} xyz\, dz\right] dxdy \\
&= \iint\limits_D \left[xy\frac{z^{۲}}{۲}\right]_{-\sqrt{۴-x^{۲}}}^{\sqrt{۴-x^{۲}}} dydx = \iint\limits_D ۰\, dydx = ۰
\end{aligned}$$

پاسخ مسأله ۷) دایرهٔ مثلثاتی را به صورت $C\ :\ \mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(\cos t, \sin t)}\ ;\ ۰\ \leq t \leq ۲\pi$ می‌توان پارامتره کرد. بنابراین

$$\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} &= \int_{۰}^{۲\pi} \mathbf{F}\left(\cos t, \sin t\right) \bullet \overrightarrow{(-\sin t, \cos t)}\, dt \\
&= \int_{۰}^{۲\pi} \overrightarrow{\left(\frac{-\sin t}{\cos^{۲} t + \sin^{۲} t}, \frac{\cos t}{\cos^{۲} t + \sin^{۲} t}\right)} \bullet \overrightarrow{(-\sin t, \cos t)}\, dt \\
&= \int_{۰}^{۲\pi} dt = ۲\pi
\end{aligned}$$

این حکم را به توسط قضیهٔ گرین نمی‌توان ثابت کرد. زیرا، $\mathbf{F}$ در نقطهٔ $(۰, ۰)$ که در داخل C واقع است، تعریف نمی‌شود؛ در حالی که باید $\mathbf{F}$ در آنجا حتی مشتق پذیر نیز باشد.

پاسخ مسأله ۸) صفحهٔ $x+y+z = ۹$ سه محوار را در ۹ قطع می‌کند (به شکل ۱۱.۲ توجه شود). بنابراین رویه مورد بحث عبارت است از

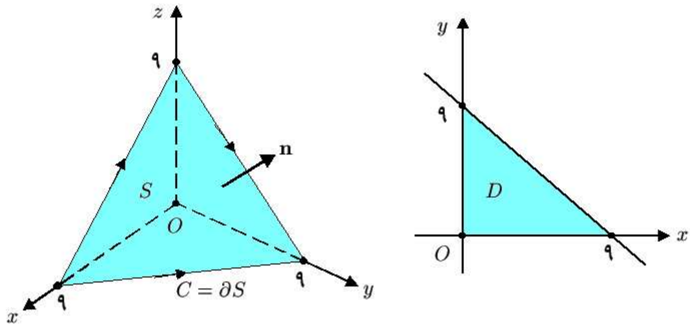
$$S\ :\ f = x + y + z - ۹ = ۰\ :\ (x,y) \in D$$

که در آن $D = \left\{(x,y)\middle|\, ۰ \leq x \leq ۹, ۰ \leq y \leq ۹ - x\right\}$، به علاوه

$$\mathbf{n} = \pm\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \pm\frac{\overrightarrow{(۱, ۱, ۱)}}{\sqrt{۱ + ۱ + ۱}} = \pm\frac{\sqrt{۳}}{۲}\overrightarrow{(۱, ۱, ۱)}$$

که چون مطابق شکل ۱۱.۲، مؤلفهٔ z در $\mathbf{n}$ باید مثبت باشد، پس در عبارت بالا حالت + مورد قبول است. همچنین،

$$d\sigma = \frac{\|\nabla f\|}{|\frac{\partial f}{\partial z}|} dxdy = \frac{\sqrt{۳}}{|۱|} dxdy = \sqrt{۳}\, dxdy$$



شکل ۱۱.۲: پاسخ مسألهٔ ۸ از امتحان ششم

$$\operatorname{Curl}(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x(z-y) & y(x-z) & z(y-x) \end{vmatrix} = \overrightarrow{(z+y, x+z, y+x)}$$

بنابراین، انتگرال مطلوب برابر است با

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} &= \iint_{(S)} \operatorname{Curl}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}\, d\sigma \\ &= \iint_D \overrightarrow{(z+y, x+z, +y+x)} \bullet \overrightarrow{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)} \sqrt{3}\, dxdy \\ &= 2 \iint_D (x+y+z)\, dxdy = 18 \iint_D dxdy \\ &= 18 \times A(D) = 18 \times \frac{1}{2} \times 9 \times 9 = 729 \end{aligned}$$

پاسخ مسأله ۹) در این مورد

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \frac{\partial\left(x^2\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(y^2\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(z^2\right)}{\partial z} = 2(x+y+z)$$

و اگر D داخل بیضوی $x^2 + y^2/4 + z^2 = 1$ باشد، داریم

$$\iint_{(S)} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_D \operatorname{div}(\mathbf{F})\, dxdydz = 2 \iiint_D (x+y+z)\, dxdydz$$

این انتگرال صفر است، زیرا دامنهٔ D نسبت به x، y و z متقارن است (یعنی با عوض کردن x با $-x$، y با $-y$ و یا z با $-z$ تغییر نمی‌کند) و تابع $x+y+z$ فرد است (یعنی، با تعویض مورد نظر تغییر علامت می‌دهد).

۷.۲ امتحان هفتم

صورت مسایل

۱) منحنی C از تلاقی سطوح $x^۲+۲yz=۱۳$ و $x^۲+۲y^۲+z^۲=۱۸$ حاصل شده است. نشان دهید خط مماس بر منحنی C در نقطه $A=(۱,۲,۳)$ از نقطه $B=(-۱,۴,۱)$ می‌گذرد.

۲) پیوستگی تابع $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^۲}{x^۲+y^۲} & (x,y)\neq(۰,۰) \\ ۰ & (x,y)=(۰,۰) \end{cases}$ را در نقطه $(۰,۰)$ بررسی کنید.

۳) متحرکی بر روی یک مسیر داده شده با قانون زیر حرکت می‌کند:

$$x=۳\int_۰^t \sin(u^۲)\,du \qquad y=۵\int_۰^t \cos(u^۲)\,du$$

$$z=۴\int_۰^t \sin(u^۲)\,du \qquad t\geq ۰$$

الف) مطلوب است مسافت طی شده از لحظه $t=۰$ تا لحظه $t=۱$.

ب) شعاع انحناء مسیر فوق را در نقطه $t=۱$ بیابید.

۴) z تابعی از متغیرهای x و y است که توسط معادلات $y=u+v$ و $x=u^۲+v^۲$ و $z=u^۳+v^۳$ تعریف شده است (u و v را توابعی از x و y در نظر بگیرید). مطلوب است محاسبهٔ $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$.

۵) مطلوب است محاسبه انتگرال $\iiint_D z\sqrt{x^۲+y^۲}\,dxdydz$ که در آن D به وسیله استوانه $x^۲+y^۲=۲x$ و صفحات $y=۰$، $z=۰$ و $z=a>۰$ واقع در یک

هشتم اول محصور شده است.

۶) مطلوب است تعیین مساحت قسمتی از سطح مخروط $z^۲ = x^۲ + y^۲$ که توسط استوانه $x^۲ + y^۲ = ۲ax$ جدا می‌شود (فرض شود که $a > ۰$).

۷) فرض کنید S سطح $z = ۱ - x^۲ - y^۲$ $(۰ < z)$ است. درستی قضیهٔ استوکس را برای میدان برداری $\mathbf{F} = -۲z\mathbf{i} + ۳x\mathbf{j} + ۴y\mathbf{k}$ و این سطح تحقیق کنید.

۸) با استفاده از قضیه دیورژانس، انتگرال سطح $\iint_{(S)} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, d\sigma$ را برای میدان برداری $\mathbf{F} = ۳x\mathbf{i} + y^۲\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$ و سطح S خارجی مکعب $|x|, |y|, |z| \leq ۱$ پیدا کنید.

۹) فرض کنید C لبهٔ ناحیه‌ای بسته، هموار و ساده به معادلهٔ $\frac{x^۲}{۴} + \frac{y^۲}{۹} = ۱$ باشد. مطلوب است محاسبه مقدار انتگرال خط $\oint_C \frac{-y\,dx + x\,dy}{۴x^۲ + ۹y^۲}$.

حل مسایل

پاسخ مسأله ۱) فرض کنیم

$$S_۱ \ : \ f_۱ := x^۲ + ۲yz - ۱۳ = ۰$$
$$S_۲ \ : \ f_۲ := x^۲ + ۲y^۲ + z^۲ - ۱۸ = ۰$$

بنابراین $C = S_۱ \cap S_۲$. در این حالت $\nabla f_۱$ به $S_۱$ و $\nabla f_۲$ به $S_۲$ عمود است، پس $\nabla f_۱ \times \nabla f_۲$ هم به $S_۱$ و هم به $S_۲$ مماس است و در نتیجه به C مماس می‌باشد. پس مماس به C در نقطهٔ A عبارت است از

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \nabla f_۱|_A = \overrightarrow{(۲x, ۲z, ۲y)}|_A \times \overrightarrow{(۲x, ۴y, ۲z)}|_A \\ &= \overrightarrow{(۲, ٦, ۴)} \times \overrightarrow{(۲, ۸, ٦)} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۲ & ٦ & ۴ \\ ۲ & ۸ & ٦ \end{vmatrix} = \overrightarrow{(۴, -۴, ۴)} \end{aligned}$$

بنابراین مماس به C در نقطهٔ A، خطی است که از A به موازات $\mathbf{v}$ می‌گذرد:

$$\ell \ : \ \frac{x - ۱}{۴} = \frac{y - ۲}{-۴} = \frac{z - ۳}{۴}$$

اکنون تحقیق می‌کنیم که $B \in \ell$. برای این منظور کافی است نشان دهیم که مختصات B در معادلات ℓ صدق می‌کند: $\frac{۱-۳}{۴} = \frac{۴-۲}{-۴} = \frac{-۱-۱}{۴}$.

پاسخ مسألهٔ ۲) ظاهراً نقش x و $y^۲$ در صورت و مخرج تابع یکی است! پس برای جبران نصف بودن توان x نسبت به توان y، مسیرهای به شکل $x = \alpha y^۲$ را امتحان می‌کنیم: $\mathbf{r}_\alpha(t) = \overrightarrow{(\alpha t^۲, t)}$. در این صورت، حد مسیری f بر $\mathbf{r}_\alpha$ برابر است با

$$\lim_{t\to ۰} f\left(\mathbf{r}_\alpha(t)\right) = \lim_{t\to ۰} \frac{\left(\alpha t^۲\right)(t)^۲}{\left(\alpha t^۲\right)^۲ + (t)^۴} = \frac{\alpha}{\alpha^۲ + ۱}$$

که چون α بستگی دارد (یعنی، به انتخاب مسیر بستگی دارد)، حد f در $(۰, ۰)$ وجود ندارد. بنابراین f در $(۰, ۰)$ ناپیوسته است.

پاسخ مسألهٔ ۳) بنابه فرمول مشتق‌گیری از انتگرال وابسته به پارامتر [1] داریم

$$x'(t) = ۳\sin t^۲,\ y'(t) = ۵\cos t^۲,\ z'(t) = ۴\sin t^۲$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} ds &= ||\mathbf{r}'(t)||dt = \sqrt{\left(۳\sin t^۲\right)^۲ + \left(۵\cos t^۲\right)^۲ + \left(۴\sin t^۲\right)^۲}dt \\ &= \sqrt{۲۵\sin^۲ t^۲ + ۲۵\cos^۲ t^۲}dt = \sqrt{۲۵}dt = ۵dt \end{aligned}$$

و پاسخ قسمت (الف) عبارت است از $۵ = \int_۰^۱ ۵dt = \int_۰^۱ ds$. برای محاسبهٔ شعاع انحناء در $t = ۱$، لازم است که $r'(۱)$ و $r''(۱)$ را محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(۱) &= \overrightarrow{\left(۳\sin t^۲, ۵\cos t^۲, ۴\sin t^۲\right)}|_{t=۱} = \overrightarrow{(۳\sin ۱, ۵\cos ۱, ۴\sin ۱)} \\ \mathbf{r}''(۱) &= \overrightarrow{\left(۶t\cos t^۲, -۱۰t\sin t^۲, ۸t\cos t^۲\right)}|_{t=۱} \\ &= \overrightarrow{(۶\cos ۱, -۱۰\sin ۱, ۸\cos ۱)} \end{aligned}$$

$$\mathbf{r}'(۱) \times \mathbf{r}''(۱) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۳\sin ۱ & ۵\cos ۱ & ۴\sin ۱ \\ ۶\cos ۱ & -۱۰\sin ۱ & ۸\cos ۱ \end{vmatrix} = \overrightarrow{(۴۰, ۰, -۳۰)}$$

---

[1] منظور فرمول $\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,dx = b'(t)f(b(t),t) - a'f(a(t),t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}dx$ از درس عمومی یک است.

در نتیجه

$$\kappa(۱) = \frac{||\mathbf{r}'(۱) \times \mathbf{r}''(۱)||}{||\mathbf{r}'(۱)||^۳} = \frac{\sqrt{۱۶۰۰ + ۰ + ۹۰۰}}{(۵)^۳} = \frac{۵۰}{۱۲۵} = \frac{۲}{۵}$$

و $R(۱) = ۱/\kappa(۱) = ۵/۲$ که پاسخ قسمت (ب) است.

پاسخ مسألهٔ ۴) z تابعی از u و v است. از دستگاه معادلات $\left\{ \begin{array}{l} x = u^۲ + v^۲ \\ y = u + v \end{array} \right.$ می‌شود u و v را بر حسب توابعی از x و y بیان کرد، بنابراین چون z تابعی از u و v است، پس نتیجه می‌گیریم که تابعی از x و y نیز هست. پس سخن گفتن از $\partial z/\partial x$ $\partial z/\partial y$ منطقی است.برای به دست آوردن $\partial z/\partial x$ از دو طرف رابطهٔ $z = u^۳ + v^۳$ نسبت به x مشتق بگیریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ۳u^۲ \frac{\partial u}{\partial x} + ۳v^۲ \frac{\partial v}{\partial x}$$

برای به اتمام رساندن بحث باید $\partial u/\partial x$ و $\partial v/\partial x$ را حساب کنیم. بنابراین، از طرفین دستگاه مطرح شده نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$۱ = ۲u\frac{\partial u}{\partial x} + ۲v\frac{\partial v}{\partial x} \quad , \quad ۰ = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

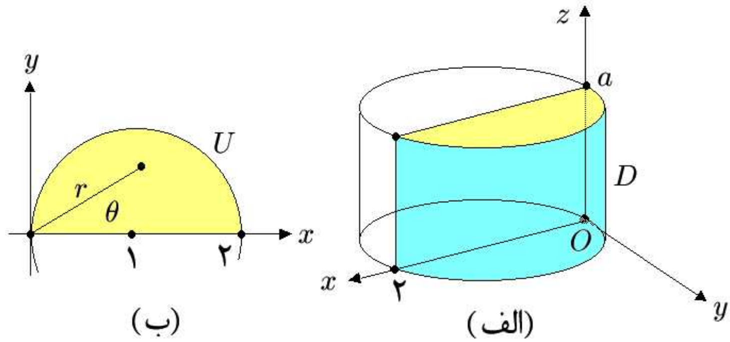
سپس، این دستگاه را به منظور یافتن $\frac{\partial u}{\partial x}$ و $\frac{\partial v}{\partial x}$ حل می‌کنیم: از معادلهٔ دوم نتیجه می‌گیریم $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial x}$ و با قرار دادن این عبارت در معادلهٔ اول، داریم $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-۱}{۲u - ۲v}$ و $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{۱}{۲u - ۲v}$. بنابراین

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ۳u^۲ \frac{۱}{۲u - ۲v} + ۳v^۲ \frac{-۱}{۲u - ۲v} = \frac{۳u^۲ - ۳v^۲}{۲u - ۲v} = \frac{۳}{۲}(u + v)$$

به صورت مشابه، $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{v}{v - u}$، $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{u}{u - v}$ و

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= ۳u^۲ \frac{\partial u}{\partial y} + ۳v^۲ \frac{\partial v}{\partial y} \\ &= ۳u^۲ \frac{v}{v - u} + ۳v^۲ \frac{u}{u - v} = \frac{-۳u^۲ v + ۳v^۲ u}{u - v} = -۳uv \end{aligned}$$

پاسخ مسألهٔ ۵) ابتدا معادلهٔ $x^۲ + y^۲ = ۲x$ را به صورت $x^۲ - ۲x + ۱ + y^۲ = ۱$ یا $(x - ۱)^۲ + y^۲ = ۱$ بازنویسی می‌کنیم. پس پایهٔ استوانهٔ مورد بحث، دایره‌ای به مرکز



شکل ۱۲.۲: پاسخ مسألهٔ ۵ از امتحان هفتم

$(۱,۰)$ و شعاع یک است (به شکل ۱۲.۲—(الف) توجه شود). از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. روشن است که $۰ \le z \le a$ و بایستی $(x,y) \in U$ (به شکل ۱۲.۲ توجه شود).

در اینجا $x^۲ + y^۲ \le ۲x$. بنابراین، $r^۲ \le ۲r\cos\theta$ در نتیجه $۰ \le r \le ۲\cos\theta$.
بعلاوه $y \ge ۰$ و $x \ge ۰$؛ بنابراین $r\cos\theta \ge ۰$ و $r\sin\theta \ge ۰$ یا به بیان دیگر $\sin\theta$ و $\cos\theta$ هر دو نامنفی‌اند. در نتیجه $۰ \le \theta \le \pi/۲$. پس تصویر قطبی U عبارت از

$$U' = \left\{(r,\theta) \,\middle|\, \le \theta \le \frac{\pi}{۲}, ۰ \le r \le ۲\cos\theta\right\}$$

است. در نتیجه، اگر D' تصویر استوانه‌ای D باشد، داریم

$$\begin{aligned}
\iiint_D z\sqrt{x^۲+y^۲}\,dxdydz &= \iiint_{D'} zr^۲\, dzdrd\theta \\
&= \int_۰^{\pi/۲}\left[\int_۰^{۲\cos\theta}\left[\int_۰^a zr^۲\,dz\right]dr\right]d\theta = \int_۰^{\pi/۲}\left[\int_۰^{۲\cos\theta}\frac{a^۲}{۲}r^۲\,dr\right]d\theta \\
&= \int_۰^{\pi/۲}\frac{a^۲}{۲}\frac{(۲\cos\theta)^۳}{۳}\,d\theta = \frac{۴a^۲}{۳}\int_۰^{\pi/۲}\cos^۳\theta\,d\theta \\
&= \frac{۴a^۲}{۳}\int_۰^{\pi/۲}\left(۱-\sin^۲\theta\right)\cos\theta\,d\theta = \frac{۴a^۲}{۳}\left[\sin\theta - \frac{\sin^۳\theta}{۳}\right]_۰^{\pi/۲} \\
&= \frac{۴a^۲}{۳}\left(۱-\frac{۱}{۳}\right) = \frac{۸a^۲}{۹}
\end{aligned}$$

پاسخ مسأله ٦) معادلهٔ استوانه $x^۲ + y^۲ = ۲ax$ را به صورت $(x-a)^۲ + y^۲ = a^۲$ بازنویسی می‌کنیم. از حل معادلهٔ $z^۲ = x^۲ + y^۲$ به $z = \pm\sqrt{x^۲ + y^۲}$ می‌رسیم. بنابراین با دو سطح مواجه هستیم

$$S_۱ : z = \sqrt{x^۲ + y^۲}; (x,y) \in D \quad , \quad S_۲ : z = -\sqrt{x^۲ + y^۲}; (x,y) \in D$$

که در آن $D : (x-a)^۲ + y^۲ \leq a^۲$. معادلهٔ معرف هر دو سطح عبارت است از $f : x^۲ + y^۲ - z^۲ = ۰$. بنابراین

$$\begin{aligned} d\sigma_۱ &= \frac{\|\nabla f\|}{|\frac{\partial f}{\partial z}|}dxdy = \frac{\|\overrightarrow{(۲x, ۲y, -۲z)}\|}{|-۲z|}dxdy \\ &= \frac{\sqrt{۴x^۲ + ۴y^۲ + ۴z^۲}}{۲|z|}dxdy = \frac{\sqrt{۴x^۲ + ۴y^۲ + ۴\left(x^۲ + y^۲\right)}}{۲\sqrt{x^۲ + y^۲}}dxdy \\ &= \frac{\sqrt{۸}}{۲}dxdy = \sqrt{۲}dxdy \end{aligned}$$

و در نتیجه،

$$\begin{aligned} \mathrm{Area}\,(S_۱) &= \iint_D d\sigma_۱ = \iint_D \sqrt{۲}dxdy = \sqrt{۲}\mathrm{Area}(D) \\ &= \sqrt{۲} \times \left(\pi \times (a)^۲\right) = \sqrt{۲}\pi a^۲ \end{aligned}$$

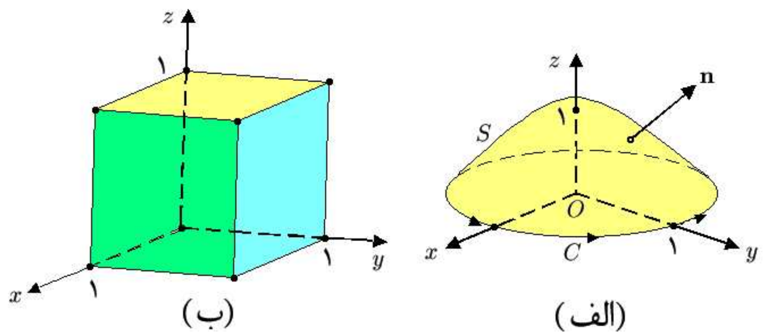
و به صورت مشابه، مساحت $S_۲$ نیز برابر $\sqrt{۲}\pi a^۲$ است. بنابراین مساحت مساحت مطلوب برابر است با حاصل جمع این دو مقدار، یعنی $۲\sqrt{۲}\pi a^۲$.

پاسخ مسأله ۷) چون $z \leq ۰$، پس $۱ - x^۲ - y^۲ \geq ۰$ یا $D : x^۲ + y^۲ \leq ۱$، که تصویر رویهٔ S بر صفحهٔ xOy است. رویهٔ مذکور عبارت است از

$$S : f := x^۲ + y^۲ + z - ۱ = ۰; (x,y) \in D$$

که مطابق شکل ۱۳.۲—(الف)، $\mathbf{n}$ رو به بالا دارد (یعنی، مؤلفهٔ z آن مثبت است). لبهٔ آن عبارت است از $C : x^۲ + y^۲ + z - ۱ = ۰ , z = ۰$ یا $C : x^۲ + y^۲ = ۱ , z = ۰$ و جهت حرکت آن نیز جهت مثلثاتی است. بنابراین C را به صورت استاندارد پارامتره می‌کنیم:

$$C : \mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(\cos t, \sin t, ۰)} ; \ ۰ \leq t \leq ۲\pi$$



شکل ۱۳.۲: (الف) مسألهٔ ۷ از امتحان هفتم (ب) مسألهٔ ۸ از امتحان هفتم

بنابراین،

$$\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{F}\bullet\mathbf{n}d\sigma &= \int_{۰}^{۲\pi} \mathbf{F}(\cos t, \sin t, ۰)\bullet\overrightarrow{(-\sin t, \cos t, ۰)}\,dt\\
&= \int_{۰}^{۲\pi} \overrightarrow{(۰, ۳\cos t, ۴\sin t)}\bullet\overrightarrow{(-\sin t, \cos t, ۰)}\,dt\\
&= \int_{۰}^{۲\pi} ۳\cos^{۲} t dt = \frac{۳}{۲}\left[t+\frac{۱}{۲}\sin ۲t\right]_{۰}^{۲\pi} = ۳\pi
\end{aligned}$$

برای محاسبهٔ این انتگرال با استفاده از قضیهٔ استوکس، لازم است تاکرل $\mathbf{F}$ را محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Curl}(\mathbf{F}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ -۲z & ۳x & ۴y \end{vmatrix} = \overrightarrow{(۴, -۲, ۳)}\\
\mathbf{n} &= \pm\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \pm\frac{\overrightarrow{(۲x, ۲y, ۱)}}{\sqrt{۴x^{+}۴y^{۲}+۱}}\\
d\sigma &= \frac{\|\nabla f\|}{|\frac{\partial f}{\partial z}|}dxdy = \frac{\sqrt{۴x^{۲}+۴y^{۲}+۱}}{|۱|}dxdy\\
&= \sqrt{۴x^{۲}+۴y^{۲}+۱}\,dxdy
\end{aligned}$$

توضیح اینکه، چون $\mathbf{n}$ رو به بالا است، مؤلفهٔ z آن مثبت است و بنابراین $\mathbf{n}$ با حالت + مورد قبول است، یعنی $\mathbf{n}\,d\sigma = \overrightarrow{(۲x,۲y,۱)}\,dxdy$. بنابراین

$$\begin{aligned}\iint_{(S)} \operatorname{Curl}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}\,d\sigma &= \iint_D \overrightarrow{(۴,-۲,۳)} \bullet \overrightarrow{(۲x,۲y,۱)}\,dxdy \\ &= \iint_D (۸x - ۴y + ۳)\ dxdy \\ &= \int_۰^{۲\pi} \left[\int_۰^۱ (۸r\cos\theta - ۴r\sin\theta + ۳)\,rdr\right] d\theta \\ &= \int_۰^{۲\pi} \left[۸\frac{r^۳}{۳}\cos\theta - ۴\frac{r^۳}{۳}\sin\theta + ۳\frac{r^۲}{۲}\right]_۰^۱ d\theta \\ &= \int_۰^{۲\pi} \left[\frac{۸}{۳}\cos\theta - \frac{۴}{۳}\sin\theta + \frac{۳}{۲}\right] d\theta = ۳\pi\end{aligned}$$

پاسخ مسأله ۸) داخل سطح مورد نظر عبارت است از مکعب واحد (به شکل ۱۳.۲-(ب) توجه شود):

$$V\ :\ ۰ \le x \le ۱\,,\ ۰ \le y \le ۱\,,\ ۰ \le z \le ۱$$

به علاوه

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \frac{\partial(۳x)}{\partial x} + \frac{\partial\left(y^۲\right)}{\partial y} + \frac{\partial(yz)}{\partial z} = ۳ + ۲y + y = ۳(y+۱)$$

بنابراین، مطابق قضیه دیورژانس

$$\begin{aligned}\iint_{(S)} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\,d\sigma &= \iiint_V \operatorname{div}(\mathbf{F})\,dxdydz \\ &= \int_۰^۱ \left[\int_۰^۱ \left[\int_۰^۱ ۳(y+۱)\ dz\right] dz\right] dx \\ &= \int_۰^۱ \left[\int_۰^۱ [۳(y+۱)z]_۰^۱\,dy\right] dx = \int_۰^۱ \left[\int_۰^۱ ۳(y+۱)\ dy\right] dx \\ &= \int_۰^۱ \left[۳\frac{y^۲}{۲} + ۳y\right]_۰^۱ dx = \int_۰^۱ \left(\frac{۳}{۲} + ۳\right) dx = \frac{۹}{۲}\big[x\big]_۰^۱ = \frac{۹}{۲}\end{aligned}$$

پاسخ مسأله ۹) چون مبداء مختصات (یعنی $(\circ, \circ)$) در داخل منحنی C واقع است. نمی‌توان از قضیهٔ گرین استفاده کرد. بنابراین، بایستی مستقیماً اقدام به محاسبهٔ انتگرال خط داده شده کرد. برای حذف ۴ از مخرج $x^{۲}$ و ۹ از مخرج $y^{۲}$ در معادلهٔ خم، فرض می‌کنیم $x = ۲\cos t$ و $y = ۳\sin t$، یعنی

$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(۲\cos t, ۳\sin t)}\ ;\ \circ \le t \le ۲\pi$$

بنابراین،

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{-ydx + xdy}{۴x^{۲} + ۹y^{۲}} &= \int_{\circ}^{۲\pi} \frac{-(۳\sin t)\ d(۲\cos t) + (۲\cos t)\ d(۳\sin t)}{۴(۲\cos t)^{۲} + ۹(۳\sin t)^{۲}} \\
&= \int_{\circ}^{۲\pi} \frac{٦\sin^{۲} t + ٦\cos^{۲} t}{١٦\cos^{۲} t + ۸۱\sin^{۲} t} dt = \int_{\circ}^{۲\pi} \frac{٦dt}{١٦\cos^{۲} t + ۸۱\sin^{۲} t} \\
&\overset{(۱)}{=} ۱۲\int_{\circ}^{\pi} \frac{dt}{١٦\cos^{۲} t + ۸۱\sin^{۲} t} \overset{(۲)}{=} ۲۴\int_{\circ}^{\pi/۲} \frac{dt}{١٦\cos^{۲} t + ۸۱\sin^{۲} t} \\
&\overset{(۳)}{=} ۲۴\int_{\circ}^{\pi/۲} \frac{dt/\cos^{۲} t}{١٦ + ۸۱\tan^{۲} x} \overset{(۴)}{=} ۲۴\int_{\circ}^{\infty} \frac{du}{١٦ + ۸۱u^{۲}} \\
&= \lim_{a\to\infty} \left[\frac{۲}{۳}\arctan\left(\frac{۹u}{۴}\right)\right]_{\circ}^{a} = \frac{\pi}{۳}
\end{aligned}$$

توضیح اینکه در تساوی (۱) از این حکم استفاده نموده‌ایم که تابع $١٦\cos^{۲} t + ۸۱\sin^{۲} t$ با تناوب π است و در تساوی (۲) از تقارن انتگرال نسبت به $t = \pi/۲$ استفاده نموده‌ایم. در تساوی (۳) صورت و مخرج را بر $\cos^{۲} t$ تقسیم نموده‌ایم. در (۴) فرض کرده‌ایم $u = \tan t$ و سپس انتگرال ناسرهٔ حاصل را محاسبه نموده‌ایم.

۸.۲ امتحان هشتم

صورت مسایل

۱) پیوستگی تابع $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}} & (x,y) \ne (\circ,\circ) \\ \circ & (x,y) = (\circ,\circ) \end{cases}$ را بر کل $\mathbb{R}^{۲}$ بررسی کنید.

۲) اگر $x = te^t$، $y = e^t \sin t$ و $z = e^t \cos t$، معادلات پارامتری مسیر حرکت ذرهٔ متحرکی باشند، آنگاه بردارهای $\mathbf{v}$، $\mathbf{T}$ و انحناء κ مسیر و معادلهٔ صفحهٔ قائم به آن را در لحظهٔ $t = ۰$ بیابید.

۳) حجم جسم محصور شده به رویه‌های $z = ۱۸ - x^۲ - ۹y^۲$ و $z = x^۲ + ۹y^۲$ را بیابید.

۴) نقطه‌ای بر سطح $z = xy + ۱$ چنان بیابید که نسبت به مبداء مختصات دارای کوتاهترین فاصله باشد.

۵) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال $\iint_U \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dxdy$ که در آن U ذوزنقه‌ای با رئوس $(۱, ۰)$، $(۲, ۰)$، $(۰, ۱)$ و $(۰, ۲)$ واقع در صفحه xOy است.

۶) مشتق سویی (جهتدار) تابع $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ را در نقطهٔ دلخواهی از سطح $xy + yz + zx = ۰$ و در امتداد $\operatorname{grad}(f)$ بیابید.

۷) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال سطح $\iint_{(S)} \left(x^۲ + y^۲ + z^۲\right) d\sigma$ که S سطح جسم حاصل از تلاقی استوانهٔ $x^۲ + y^۲ = ۱$ و صفحات $z = ۰$ و $z = a$ است.

۸) درستی قضیهٔ استوکس را برای میدان برداری $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + zx\mathbf{k}$ در صورتی تحقیق کنید که C مرز قسمت جدا شده از صفحهٔ $x + y + z = ۱$ توسط صفحات $x = ۰$، $y = ۰$ و $z = ۰$ باشد.

حل مسایل

پاسخ مسألهٔ ۱) این تابع در همسایگی هر نقطهٔ $X_۰ \neq (۰, ۰)$ با تابع مقدماتی $\frac{xy}{\sqrt{x^۲+y^۲}}$ برابر است و در نتیجه پیوسته می‌باشد. در مورد $X_۰ = (۰, ۰)$ کافی است مسیر $C_\alpha(t) = (t, \alpha t)$ منتهی به مبداء را در نظر می‌گیریم (یعنی، $\lim\limits_{t\to ۰} \mathbf{r}_\alpha(t) = \overrightarrow{(۰, ۰)}$) که α عددی دلخواه است. در این صورت، حد f بر مسیر $\mathbf{r}_\alpha$ برابر است با

$$\begin{aligned}\lim_{t\to ۰} \mathbf{r}_\alpha(t) &= \lim_{t\to ۰} \frac{t\,(\alpha t)}{\sqrt{(t)^۲ + (\alpha t)^۲}} \\ &= \lim_{t\to ۰} \frac{\alpha t}{\sqrt{۱ + \alpha^۲}} = \lim_{t\to ۰} \frac{\alpha t}{\sqrt{۱+\alpha^۲}} = ۰\end{aligned}$$

پس احتمالاً حد f در مبداء موجود و برابر صفر است (زیرا لااقل بر همهٔ خطوط گذرنده از مبداء برابر صفر است). برای اطمینان از این مطلب، باید ثابت کنیم که

$$\forall\varepsilon\, \exists\delta\, \forall\overrightarrow{(x,y)} \left(\circ < \|\overrightarrow{(x,y)} - \overrightarrow{(\circ,\circ)}\| < \delta \Longrightarrow \left| \frac{xy}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}} - \circ \right| < \varepsilon \right)$$

فرض کنیم $z = \max\{|x|,|y|\}$. چون $\delta > \sqrt{x^{۲}+y^{۲}} \geq |x|,|y|$ پس $z < \delta$ و در نتیجه،

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}} - \circ\right| = \frac{|x||y|}{\sqrt{|x|^{۲}+|y|^{۲}}} \overset{(۱)}{<} \frac{z\times z}{\sqrt{z^{۲}+\circ^{۲}}} = \frac{z^{۲}}{z} = z < \delta$$

توضیح اینکه در نامساوی (۱) به جای $|x|$ یا $|y|$ (آن که بزرگتر است) z را قرار داده و به جای دیگری صفر می‌گذاریم. پس بنا به نامساوی بالا، کافی است δ را برابر ε بگیریم. بنابراین، f بر کل $\mathbb{R}^{۲}$ پیوسته است.

پاسخ مسألهٔ ۲) در این مسأله، خم به صورت $\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(te^t, e^t\sin t, e^t\cos t)}$ است.بنابراین،

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'(\circ) &= \overrightarrow{(e^t+te^t, e^t\sin t + e^t\cos t, e^t\cos t - e^t\sin t)}|_{t=\circ}\\
&= \overrightarrow{(۱,۱,۱)}\\
\mathbf{r}''(\circ) &= \overrightarrow{(۲e^t+te^t, ۲e^t\cos t, ۲-e^t\sin t)}|_{t=\circ} = \overrightarrow{(۲,۲,\circ)}\\
\mathbf{r}'(\circ)\times\mathbf{r}''(\circ) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ ۱ & ۱ & ۱\\ ۲ & ۲ & \circ \end{vmatrix} = \overrightarrow{(-۲,۲,\circ)}
\end{aligned}$$

پس، بنابه فرمول‌های مربوطه،

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(\circ) &= \mathbf{r}'(\circ) = \overrightarrow{(۱,۱,۱)}\\
\mathbf{T}(\circ) &= \frac{\mathbf{r}'(\circ)}{\|\mathbf{r}'(\circ)\|} = \frac{\overrightarrow{(۱,۱,۱)}}{\sqrt{۱+۱+۱}} = \overrightarrow{\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳},\frac{\sqrt{۳}}{۳},\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)}\\
\kappa(\circ) &= \frac{\|\mathbf{r}'(\circ)\times\mathbf{r}''(\circ)\|}{\|\mathbf{r}'(\circ)\|^{۳}} = \frac{\sqrt{(-۲)^{۲}+(۲)^{۲}+(\circ)^{۲}}}{\sqrt{(۱)^{۲}+(۱)^{۲}+(۱)^{۳}}} = \frac{۲\sqrt{۲}}{\left(\sqrt{۳}\right)^{۳}} = \frac{۲\sqrt{۶}}{۹}
\end{aligned}$$

صفحهٔ قائم بر منحنی در لحظهٔ $t = \circ$ صفحه‌ای است که از $\mathbf{r}(\circ)$ عمود بر $\mathbf{T}(\circ)$ می‌گذرد. پس چون $\mathbf{r}(\circ) = \overrightarrow{(\circ,\circ,۱)}$ و $\mathbf{T}(\circ) = \overrightarrow{(۱,۱,۱)}$، داریم

$$(۱)(x-\circ) + (۱)(y-\circ) + (۱)(z-۱) = \circ$$

در نتیجه معادلهٔ این صفحه عبارت است از $x + y + z = ۱$.

پاسخ مسألهٔ ۳) رویهٔ $z = ۱۸ - x^۲ - ۹y^۲$ یک سهمی‌گون بیضوی رو به پایین و با رأس در ۱۸ است و $z = x^۲ + ۹y^۲$ یک سهمی‌گون رو به بالا و با رأس در مبداء است (به شکل ۱۴.۲ توجه شود). محل برخورد این دو سطح $z = ۱۸ - z$ یا $z = ۹$ است. در این ارتفاع، $x^۲ + ۹y^۲ = ۹$. بنابراین تصویر ناحیهٔ حاصل بر صفحهٔ xOy بیضی $D : x^۲ + ۹y^۲ \leq ۹$ است و حجم مورد نظر عبارتست از

$$\begin{aligned} V &= \iint\limits_{D} \left\{ \left(۱۸ - x^۲ - ۹y^۲ \right) - \left(x^۲ + ۹y^۲ \right) \right\} dxdy \\ &= \iint\limits_{D} \left\{ ۱۸ - ۲x^۲ - ۱۸y^۲ \right\} dxdy \end{aligned}$$

برای اینکه بتوانیم عدد ۹ را فاکتور بگیریم، از مختصات قطبی وزندار استفاده می‌کنیم: $x = ۳r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$. در این صورت $J = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right| = ۳r$ و تصویر D در صفحهٔ $rO\theta$ عبارتست از $۰ \leq r \leq ۱$ و $۰ \leq \theta \leq ۲\pi$: D'. بنابراین

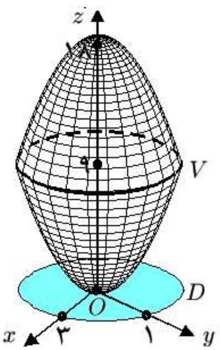
$$\begin{aligned} V &= \iint\limits_{D'} \left\{ ۱۸ - ۱۸r^۲\cos^۲\theta - ۱۸r^۲\sin^۲\theta \right\} ۳r\, drd\theta \\ &= ۵۴ \iint\limits_{D'} \left(۱ - r^۲ \right) r\, drd\theta = ۵۴ \int_۰^{۲\pi} \left[\int_۰^۱ \left(r - r^۳ \right) dr \right] d\theta \\ &= ۵۴ \int_۰^{۲\pi} \left[\frac{r^۲}{۲} - \frac{r^۴}{۴} \right]_۰^۱ d\theta = ۵۴ \int_۰^{۲\pi} \frac{۱}{۴}\, d\theta = \frac{۲۷}{۲} \Big[\theta \Big]_۰^{۲\pi} = ۲۷\pi \end{aligned}$$

پاسخ مسأله ۴) تابع $f(x,y,z) = x^۲ + y^۲ + z^۲$ (یعنی مربع فاصله از مبداء) را در نظر گرفته و آن را به شرط $z = xy + ۱$ اکسترمم می‌کنیم. فرض کنیم $g = xy - z + ۱$. پس مسألهٔ ما عبارت از اکسترمم‌گیری از f به شرط $g = ۰$ است. بنابه قضیهٔ ضریب لاگرانژ، عددی مانند λ طوری وجود دارد که $\nabla f = \lambda \nabla g$. پس دستگاهی مرکب از معادلهٔ برداری $\nabla f = \lambda \nabla g$ و معادلهٔ $g = ۰$ را حل می‌کنیم؛ معادلهٔ اول خود سه معادلهٔ معمولی را باعث می‌شود؛ زیرا

$$\overrightarrow{(۲x, ۲y, ۲z)} = \nabla f = \lambda \nabla g = \lambda \overrightarrow{(y, x, -۱)}$$

بنابراین:

$$\begin{cases} (۱) \quad ۲x = \lambda y & (۳) \quad ۲z = -\lambda \\ (۲) \quad ۲y = \lambda x & (۴) \quad z = xy + ۱ \end{cases}$$



شکل ۱۴.۲: پاسخ مسألهٔ ۳ از امتحان هشتم

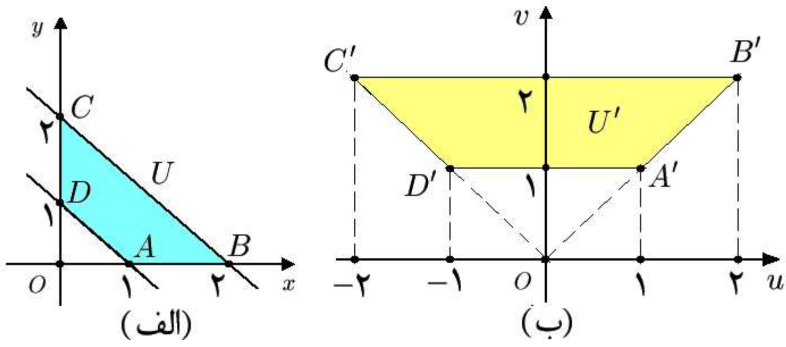
از معادلهٔ (۱) و معادلهٔ (۲) داریم $2x = \lambda y = \lambda\left(\frac{\lambda x}{2}\right) = \frac{\lambda^2}{2}x$. در نتیجه داریم $x\left(\lambda^2-4\right) = 0$. به صورت مشابه $y\left(\lambda^2-4\right) = 0$. پس سه حالت را مد نظر می‌گیریم:

الف) اگر $\lambda = 2$؛ در این صورت از معادلهٔ (۱) داریم $x = y$ و از معادلهٔ (۳) داریم $z = -1$ سپس با استفاده از معادلهٔ (۴) داریم $x^2 + 1 = -1$ یا $x^2 = -2$ که تناقض است.

ب) اگر $\lambda = -2$؛ در این صورت از معادلهٔ (۱) داریم $x = -y$ و از معادلهٔ (۳) داریم $z = 1$ سپس از معادلهٔ (۴) داریم $-x^2 + 1 = 1$ یا $x^2 = 0$ و $x = 0$. بنابراین $x = y = 0$ و $z = 1$ یعنی نقطهٔ $X_1 = (0, 0, 1)$ کاندید است.

ج) اگر $\lambda \neq 2, -2$؛ در این صورت از بحث بالا، داریم $x = 0$ (چون $\lambda^2 - 4 \neq 0$) و $y = 0$. بنابراین $z = 1$ و لذا همان نقطهٔ X_1 حاصل می‌شود. اما $f(X_1) = 1$.بنابراین نقطهٔ مینیموم موضوعی مسأله عبارت از X_1 است و فاصلهٔ این نقطه تا مبداء برابر است با $\sqrt{f(X_1)} = 1$.

پاسخ مسأله ۵) ناحیهٔ مورد انتگرال‌گیری U عبارت از (x,y) هایی است که میان خطوط $x+y=1$، $x+y=2$، $x=0$ و $y=0$ محدودند (به شکل ۱۵.۲ (a) توجه شود). چون در متغیر $\cos$ کسری از $x-y$ و $x+y$ آمده است و تابع $\cos\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)$ چه نسبت به x و چه نسبت به y قابل انتگرال نیست، فرض می‌کنیم $u = x-y$ و $v = x+y$. بنابراین $x = \dfrac{u+v}{2}$ و $y = \dfrac{v-u}{2}$. چون تابع تغییر مختصات از (x,y) به (u,v) خطی است ($(x,y) \mapsto (x-y, x+y)$)، پس تصویر ذوزنقهٔ U، یک چهر ضلعی در صفحهٔ



شکل ۱۵.۲: پاسخ مسألهٔ ۴ از امتحان هشتم

uOv خواهد بود (زیرا تصویر خط به توسط تابعی خطی، خط است). برای به‌دست آوردن تصویر مورد نظر U'، رئوس U را تصویر می‌کنیم:

نقطه	x	y	u	v	تصویر نقطه
A	۱	۰	۱	۱	A'
B	۲	۰	۲	۲	B'
C	۰	۲	−۲	۲	C'
D	۰	۱	−۱	۱	D'

از نرسیم این نقاط در صفحهٔ uOv و سپس وصل کردن آنها به یکدیگر، U' حاصل می‌شود (به شکل ۱۵.۲ (ب) توجه شود). در این شکل خط $A'B'$ به معادلهٔ $\frac{u-۱}{۲-۱} = \frac{v-۱}{۲-۱}$ یا $u = v$ است و خط $D'C'$ به معادلهٔ $\frac{v-۱}{۲-۱} = \frac{u+۱}{-۲+۱}$ یا $u = -v$ می‌باشند؛ بنابراین

$$U' = \{(u,v)\,|\,۱ \le v \le ۲, -v \le u \le v\}$$

از سوی دیگر

$$J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = |\det\begin{bmatrix} ۱/۲ & ۱/۲ \\ -۱/۲ & ۱/۲ \end{bmatrix}| = \left|\frac{۱}{۴} - \frac{-۱}{۴}\right| = \frac{۱}{۲}$$

در نتیجه

$$\iint_U \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dxdy = \iint_{U'} \cos\left(\frac{u}{v}\right) \frac{۱}{۲} dudv$$
$$= \frac{۱}{۲}\int_۱^۲ \left[\int_{-v}^{v} \cos\left(\frac{u}{v}\right) du\right] dv = \frac{۱}{۲}\int_۱^۲ \left[v\sin\left(\frac{u}{v}\right)\right]_{u=-v}^{u=v} dv$$

$$= \frac{۱}{۲}\int_{۱}^{۲}\Big(v\sin(۱) - v\sin(-۱)\Big)\,dv = \sin(۱)\int_{۱}^{۲} v\,dv = \frac{۳}{۲}\sin(۱)$$

پاسخ مسأله ۶) در این حالت، داریم

$$\text{grad}\,(f) = \nabla f = \overrightarrow{(y+z, x+z, x+y)}$$

و بنابراین، مشتق f در امتداد $\text{grad}\,(f)$ برابر است با

$$\begin{aligned} D_{\text{grad}(f)}f\,(x,y,z) &= \nabla f\,(x,y,z) \bullet \frac{\text{grad}\,(f)}{\|\text{grad}\,(f)\,\|} = \frac{\|\nabla f\|^{۲}}{\|\nabla f\|} = \|\nabla f\| \\ &= \Big\{۲\big(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}+\underbrace{xy+xz+yz}_{(۱)}\big)\Big\}^{۱/۲} \\ &= \sqrt{۲\,(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲})} \end{aligned}$$

توضیح اینکه به دلیل قرار داشتن نقطهٔ (x,y,z) بر رویهٔ داده شده، عبارت (۱) صفر است.

پاسخ مسأله ۷) چون با تغییر متغیر $x \mapsto -x$ و نیز $y \mapsto -y$ نه تابع $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}$ تغییر می‌کند و نه معادلهٔ استوانهٔ $x^{۲}+y^{۲} = ۱$ و معادلات دو صفحهٔ $z = ۰$ و $z = a$، بنابراین ما با انتگرالی از تابع زوج بر ناحیه‌ای متقارن مواجه هستیم. به همین دلیل کافی است تنها در یک هشتم اول محاسبات را انجام داده و حاصل را چهار برابر کنیم. در یک هشتم اول سه رویه وجود دارد:

$$\begin{array}{lll} S_{۱} : y = \sqrt{۱-x^{۲}} \;; & (x,z)\in D_{۱} : ۰ \le x \le ۱\,,\; ۰ \le z \le a \\ S_{۲} : z = a \;; & (x,y)\in D_{۲} : x^{۲}+y^{۲} \le ۱\,,\; x \ge ۰\,,\; y \ge ۰ \\ S_{۳} : z = ۰ \;; & (x,y)\in D_{۳} = D_{۲} \end{array}$$

در این صورت معادلهٔ معرف سطح $S_{۱}$ عبارت از $f_{۱} = x^{۲}+y^{۲}-۱ = ۰$ است، معادلهٔ معرف سطح $S_{۲}$ عبارت از $f_{۲} = z - a = ۰$ و سطح $S_{۳}$ عبارت است از $f_{۳} = z = ۰$ می‌باشد. بنابراین

$$\begin{aligned} d\sigma_{۱} &= \frac{\|\nabla f_{۱}\|}{|\partial f_{۱}/\partial y|}dxdz = \frac{\|\overrightarrow{(۲x, ۲y, ۰)}\|}{|۲y|}dxdz \\ &= \frac{\sqrt{۴x^{۲}+۴y^{۲}+۰}}{۲|y|}dxdz = \frac{dxdz}{\sqrt{۱-x^{۲}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\sigma_۲ &= \frac{\|\nabla f_۲\|}{|\partial f_۲/\partial z|}dxdy = \frac{\|\overrightarrow{(۰,۰,۱)}\|}{|۱|}dxdy = dxdy \\ d\sigma_۳ &= \frac{\|\nabla f_۳\|}{|\partial f_۳/\partial z|}dxdy = \frac{\|\overrightarrow{(۰,۰,۱)}\|}{|۱|}dxdy = dxdy \end{aligned}$$

و در ادامه، داریم

$$\begin{aligned} \iint\limits_{(S_۱)} \left(x^۲+y^۲+z^۲\right) d\sigma &= \iint\limits_{D_۱} \left(۱+z^۲\right) \frac{dxdz}{\sqrt{۱-x^۲}} \\ &= \int_۰^۱ \left[\int_۰^a \frac{۱+z^۲}{\sqrt{۱-x^۲}}dz\right] dx = \int_۰^۱ \frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}} \left[z+\frac{z^۳}{۳}\right]_۰^a dx \\ &= \left(a+\frac{a^۳}{۳}\right)\int_۰^۱ \frac{dx}{\sqrt{۱-x^۲}} = \left(a+\frac{a^۳}{۳}\right)\left[\arcsin x\right]_۰^۱ \\ &= \frac{\pi}{۲}\left(a+\frac{a^۳}{۳}\right) \\ \iint\limits_{(S_۲)} \left(x^۲+y^۲+z^۲\right) d\sigma &= \iint\limits_{D_۲} \left(x^۲+y^۲+a^۲\right) dxdy \\ &= \iint\limits_{D'} \left(r^۲+a^۲\right) rdrd\theta = \int_۰^{\pi/۲} \left[\int_۰^۱ \left(r^۲+a^۲\right) rdr\right] d\theta \\ &= \int_۰^{\pi/۲} \left[\frac{r^۴}{۴}+a^۲\frac{r^۲}{۲}\right]_۰^۱ d\theta = \int_۰^{\pi/۲} \left(\frac{۱}{۴}+\frac{a^۲}{۲}\right) d\theta \\ &= \frac{\pi}{۲}\left(\frac{۱}{۴}+\frac{a^۲}{۲}\right) = \frac{\pi}{۸}\left(۱+۲a^۲\right) \\ \iint\limits_{(S_۳)} \left(x^۲+y^۲+z^۲\right) d\sigma &= \iint\limits_{D_۳} \left(x^۲+y^۲+۰\right) dxdy \\ &= \iint\limits_{D'} \left(r^۲\right) rdrd\theta = \int_۰^{\pi/۲} \left[\int_۰^۱ r^۳dr\right] d\theta \\ &= \int_۰^{\pi/۲} \left[\frac{r^۴}{۴}\right]_۰^۱ d\theta = \frac{۱}{۴}\int_۰^{\pi/۲} d\theta = \frac{۱}{۴}\left[\theta\right]_۰^{\pi/۲} = \frac{\pi}{۸} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\iint\limits_{(S)} \left(x^{2}+y^{2}+z^{2}\right) d\sigma &= \frac{\pi}{2}\left(a+\frac{a^{3}}{3}\right)+\frac{\pi}{8}\left(1+2a^{2}\right)+\frac{\pi}{8} \\ &= \frac{\pi}{12}\left(3+6a+3a^{2}+2a^{3}\right)\end{aligned}$$

و بنابراین، پاسخ مسأله عبارت است از چهار برابر مقدار بالا، یعنی

$$\frac{\pi}{3}\left(3+6a+3a^{2}+2a^{3}\right)$$

پاسخ مسأله ۸) ابتدا صفحهٔ $x+y+z=1$ را رسم می‌کنیم (شکل ۱۶.۲—(الف)). روشن است که مرز ناحیه جدا شده از آن توسط صفحات مختصاتی، مثلثی است با رئوس در $P(1,0,0)$، $Q(0,1,0)$ و $R(0,0,1)$. بنابراین مرز آن را (که C می‌نامیم) به صورت زیر می‌شود پارامتره کرد:

$$\begin{aligned}PQ &: \mathbf{r}(t)=(1-t)P+tQ=\overrightarrow{(1-t,t,0)}\ ;\quad 0\le t\le 1 \\ QR &: \mathbf{r}(t)=(1-t)Q+tR=\overrightarrow{(0,1-t,t)}\ ;\quad 0\le t\le 1 \\ RP &: \mathbf{r}(t)=(1-t)R+tP=\overrightarrow{(t,0,1-t)}\ ;\quad 0\le t\le 1\end{aligned}$$

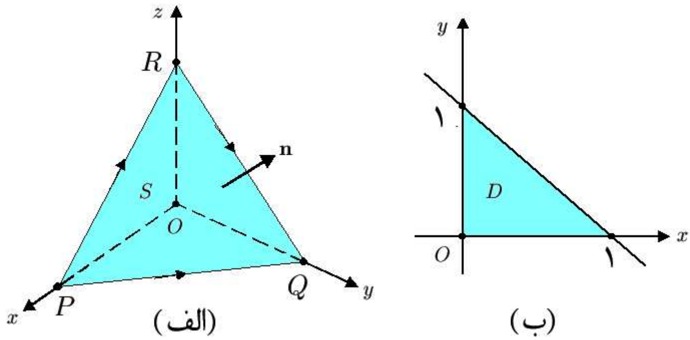
بنابراین:

$$\begin{aligned}\int_{PQ}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} &= \int_{0}^{1}\mathbf{F}(1-t,t,0)\bullet\overrightarrow{(-1,1,0)}\,dt \\ &= \int_{0}^{1}\overrightarrow{(t(1-t),0,0)}\bullet\overrightarrow{(-1,1,0)}\,dt \\ &= \int_{0}^{1}\left(t^{2}-t\right)dt=\left[\frac{t^{3}}{3}-\frac{t^{2}}{2}\right]_{0}^{1}=\frac{-1}{6}\end{aligned}$$

به دلیل تشابه موجود در مسأله،

$$\int_{QR}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}=\int_{RP}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}=\int_{PQ}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}=\frac{-1}{6}$$

در نتیجه، $\oint_{C}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$ که عبارت از مجموع این سه مقدار است، برابر $3\times\frac{-1}{6}=\frac{-1}{2}$ می‌باشد.



شکل ۱٦.۲: پاسخ مسألهٔ ۸ از امتحان هشتم

برای محاسبه توسط قضیهٔ استوکس، لازم است تا کرل $\mathbf{F}$ را محاسبه کنیم

$$\mathrm{Curl}\,(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ xy & yz & zx \end{vmatrix} = \overrightarrow{(\circ - y, \circ - z, \circ - x)} = \overrightarrow{(-y, -z, -x)}$$

از طرفی، رویه مورد نظر عبارت است از $S\ :\ f = x+y+z-۱ = \circ ; (x, y) \in D$ که در آن D مثلث آمده در شکل ۱٦.۲—(ب) می‌باشد: $D\ :\ \circ \leq x \leq ۱\ ,\ \circ \leq y \leq ۱ - x$
بنابراین:

$$\mathbf{n} = \pm\frac{\|\nabla f\|}{\|\nabla f\|} = \pm\frac{\overrightarrow{(۱, ۱, ۱)}}{\sqrt{۱+۱+۱}} = \pm\overrightarrow{\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}, \frac{\sqrt{۳}}{۳}, \frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)}$$

که چون در شکل ۱٦.۲ (الف) بردار $\mathbf{n}$ رو به بالا است، پس باید مؤلفهٔ z آن مثبت باشد. بنابران حالت $+$ مورد قبول است. بعلاوه

$$d\sigma = \pm\frac{\|\nabla f\|}{|\frac{\partial f}{\partial z}|}dxdy = \frac{\sqrt{۳}}{|۱|}dxdy = \sqrt{۳}dxdy$$

در نتیجه،

$$\iint\limits_{(S)} \mathrm{Curl}\,(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{n} d\sigma = \iint\limits_{D} \overrightarrow{(-y, -z, -x)} \bullet \overrightarrow{\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}, \frac{\sqrt{۳}}{۳}, \frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)} \sqrt{۳}dxdy$$

$$= \quad -\iint\limits_{D} (x+y+z)\ dxdy \overset{(۱)}{=} -\iint\limits_{D} dxdy$$

$$\stackrel{(۲)}{=} \quad -\mathrm{Area}(D) = -\frac{۱}{۲} \times ۱ \times ۱ = \frac{-۱}{۲}$$

توضیح اینکه در تساوی (۱) از این واقعیت که (x,y,z) بر S واقع است و در نتیجه $x+y+z = ۱$، استفاده کرده‌ایم. در تساوی (۲) از این واقعیت استفاده کرده‌ایم که انتگرال تابع یک بر هر ناحیه‌ای، برابر مساحت آن ناحیه می‌شود.

۹.۲ امتحان نهم

صورت مسایل

۱) معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که شامل دو خط متقاطع زیر باشند:

$$\begin{cases} ۳x + ۲y + z + ۲ = ۰ \\ x - y + ۲z - ۱ = ۰ \end{cases} \qquad \frac{x-۲}{۴} = \frac{y+۳}{-۱} = \frac{z+۲}{۳}$$

۲) پیوستگی تابع $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^۲+e^y}{x-۱} & x > ۱ \\ \frac{۱}{x+۱} & x > -۱ \\ ۰ & |x| \leq ۱ \end{cases}$ را در کلیهٔ نقاط صفحهٔ مختصات بررسی کنید.

۳) فرض کنید $z = x^۳ + y^۳$ و $\begin{cases} x^۲ + y^۲ = t \\ ۲x + ۳y = t^۳ \end{cases}$، مطلوب است محاسبهٔ $\frac{dz}{dt}$.

۴) بردارهای سرعت، شتاب و نیز انحنا و تاب منحنی مسیر حرکت یک نقطهٔ مادی به معادلهٔ

$$C \,:\, \mathbf{r}(t) = \overrightarrow{\left(\tan t, t, ۲t^۲ + \tan t\right)} \;\; ; \;\; t \in \left[۰, \frac{\pi}{۴}\right]$$

را در لحظهٔ شروع حرکت بیابید.

۵) کره به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱۶$ به وسیلهٔ رویهٔ $x^۲ + z^۲ = ۶y$ قطع شده است. اولاً حجم و سطح جسمس پیدا کند که درون هر دو سطح قرار گرفته باشد. ثانیاً گشتاور ماند (ممان اینرسی) جسم مورد نظر را نسبت به محور y ها به‌دست آورید در صورتیکه بدانیم جرم مخصوص هر نقطه از ناحیه مقدار ثابت ۱ باشد.

۶) مطلوب است $\int_C \left(x^۲ - yz\right)\, dx + \left(y^۲ - zx\right)\, dy + \left(z^۲ - xy\right)\, dz$ که در آن
C مارپیچ $\left\{\begin{array}{l} x = a\cos t \\ y = a\sin t \quad t \in [۰, ۲\pi] \\ z = ht/۲\pi \end{array}\right.$ است و h عدد ثابتی است.

۷) مطلوب است محاسبهٔ سطح قسمتی از رویهٔ $z = ۴ - x^۲ - y^۲$ که در بالای صفحه xOy واقع شده است.

۸) منحنی C از تلاقی صفحه $z = ۵ - ۲x - ۲y$ و سطح $z = -x^۲ - y^۲ + ۴$ حاصل شده است. اگر $\mathbf{F} = \overrightarrow{(x, y, z + x)}$، آنگاه مطلوب است محاسبهٔ $W = \oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ و تحقیق قضیهٔ استوکس بر یکی از سطوح محدود شدهٔ مذکور به منحنی C.

حل مسایل

پاسخ مسأله ۱) می‌دانیم که اگر سه نقطهٔ غیر واقع در یک امتداد از صفحه‌ای معلوم شود، آن صفحه مشخص شده است. اگر در معادلات $\frac{z + ۲}{۳} = \frac{y + ۳}{-۱} = \frac{x - ۲}{۴}$ فرض کنیم $x = ۲$، آنگاه نتیجه می‌شود که $y = -۳$ و $z = -۲$. یعنی $P_۱ = (۲, -۳, -۲)$ نقطه‌ای از این خط، و لذا نقطه‌ای از صفحهٔ مورد نظر ما است. به صورت مشابه با قرار دادن $x = ۶$ در ان معادلات، نتیجه می‌گیریم که $۱ = \frac{y + ۳}{-۱} = \frac{z + ۲}{۳}$ یا $y = -۴$ و $z = ۱$. بنابراین $P_۲ = (۶, -۴, ۱)$ نیز بر آن صفحه واقع است. نقطهٔ سوم را از خط دیگری می‌گیری. به همین منظور درمعادلات معرف آن فرض می‌کنیم $x = ۰$، پس

$$۲y + z + ۲ = ۰ \quad , \quad -y + ۲z - ۱ = ۰$$

و لذا $z = ۰$ و $y = -۱$. بنابراین $P_۳ = (۰, -۱, ۰)$ بر صفحهٔ مورد نظر واقع است. در نتیجه، معادلهٔ صفحهٔ مورد نظر عبارت است از

$$(X - P_۱) \bullet ((P_۲ - P_۱) \times (P_۳ - P_۱)) = ۰$$

یا به بیان دیگر،

$$\begin{vmatrix} x - ۲ & y + ۳ & z + ۲ \\ ۶ - ۲ & -۴ + ۳ & ۱ + ۲ \\ ۰ - ۲ & -۱ + ۳ & ۰ + ۲ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - ۲ & y + ۳ & z + ۲ \\ ۴ & -۱ & ۳ \\ -۲ & ۲ & ۲ \end{vmatrix} = ۰$$

پس $\circ = (۲ + z)\,۶ + (۳ + y)\,۱۴ - (۲ - x)\,۸-$ یا $-۴x - ۷y + ۳z - ۷ = \circ$.

پاسخ مسأله ۲) فرض کنیم $X_\circ = (x_\circ, y_\circ)$. بسته به وضعیت $x_\circ$، پنج حالت به شرح زیر را در نظر می‌گیریم:

الف) اگر $x_\circ < -۱$؛ در این حالت ضابطهٔ f در یک همسایگی از $X_\circ$ به صورت $\frac{۱}{x+۱}$ است که از کسری از توابع پیوسته و با مخرج مخالف صفر است، پس f در $X_\circ$ پیوسته است.

ب) اگر $x_\circ = -۱$؛ در این صورت f در $X_\circ$ ناپیوسته است، چرا که اگر مسیر $\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(t, y_\circ)}$ آنگاه

$$\lim_{t\to -۱+} f(\mathbf{r}(t)) = \lim_{t\to -۱+} \circ = \circ$$

$$\lim_{t\to -۱-} f(\mathbf{r}(t)) = \lim_{t\to -۱-} \frac{۱}{t+۱} = -\infty$$

پس حد مسیری f بر مسیر C موجود نیست. بنابراین حد f در نقطهٔ $\lim\limits_{t\to -۱} \mathbf{r}(t) = X_\circ$ موجود نیست.

ج) اگر $-۱ < x_\circ < ۱$؛ در این صورت f در یک همسایگی از $X_\circ$ با ضابطهٔ $\circ$ است، که به وضوح تابعی پیوسته است.

د) اگر $x_\circ = ۱$؛ در این صورت f در $X_\circ$ ناپیوسته است، چرا که اگر مسیر $\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(t, y_\circ)}$، آنگاه

$$\lim_{t\to ۱+} f(\mathbf{r}(t)) = \lim_{t\to ۱+} \frac{t^۲ + e^{y_\circ}}{t-۱} = +\infty$$

$$\lim_{t\to ۱-} f(\mathbf{r}(t)) = \lim_{t\to ۱-} \circ = \circ$$

سپس حد مسیری f بر مسیر $\mathbf{r}$ موجود نیست. بنابراین حد f در $X_\circ$ موجود نیست.

ه) اگر $x_\circ > ۱$؛ در این صورت f در همسایگی از $X_\circ$ به صورت $\frac{x^۲ + e^y}{x-۱}$ است که کسری از توابع پیوسته با مخرج مخالف صفر است، پس در $X_\circ$ پیوسته است.

نتیجه اینکه f در کل $\mathbb{R}^۲$ به جز بر خط $x = ۱$ و خط $x = -۱$ پیوسته است.

پاسخ مسأله ۳) اگر از طرفین رابطهٔ $z = x^۳ + y^۳$ نسبت به t مشتق بگیریم، به دست می‌آوری $\frac{dz}{dt} = ۳x^۲\frac{dx}{dt} + ۳y^۲\frac{dy}{dt}$. پس لازم است که $\frac{dx}{dt}$ و $\frac{dy}{dt}$ را محاسبه کنیم.

برای این منظور از دو طرف تساویهای $x^{۲}+y^{۲}=t$ و $۲x+۳y=t^{۲}$ نسبت به t مشتق می‌گیریم:

$$۱)\quad ۲x\frac{dx}{dt}+۲y\frac{dy}{dt}=۱ \qquad\qquad ۲)\quad ۲\frac{dx}{dt}+۳\frac{dy}{dt}=۲t$$

برای حل دستگاه معادلات، اگر دو طرف معادلهٔ (۲) را در $-۲y$ و دو طرف معادلهٔ (۱) را در ۳ ضرب کنیم و سپس د معادلهٔ حاصل را با هم جمع کنیم، به دست آوریم: $۳=(۶x-۴y)\frac{dx}{dt}$ و یا اینکه $\frac{dx}{dt}=\frac{۳-۴yt}{۶x-۴y}$ و با قرار دادن این مقدار در معادلهٔ (۲) داریم

$$۲\frac{۳-۴yt}{۶x-۴y}+۳\frac{dy}{dt}=۲t$$

و یا اینکه $\frac{dy}{dt}=\frac{۲xt-۱}{۳x-۲y}$. در نتیجه

$$\frac{dz}{dt}=۳x^{۲}\frac{۳-۴yt}{۶x-۴y}+۳y^{۲}\frac{۲xt-۱}{۳x-۲y}$$

پاسخ مسأله ۴) لحظهٔ شروع عبارت از $t=۰$ است. در نتیجه

$$\mathbf{r}'(۰)=\overrightarrow{\left(۱+\tan^{۲}t,\,۱,\,۴t+۱+\tan^{۲}t\right)}|_{t=۰}=\overrightarrow{(۱,۱,۱)}$$

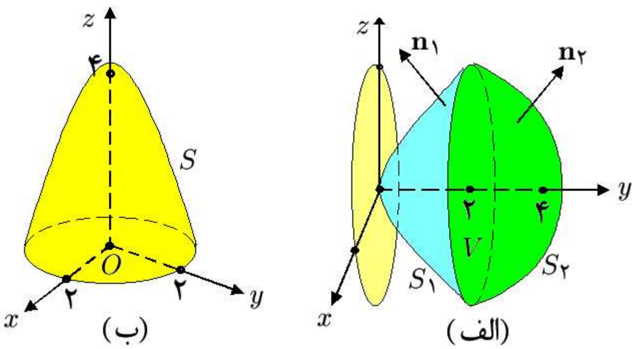
$$\mathbf{r}''(۰)=\overrightarrow{\left(۲\tan t+۲\tan^{۳}t,\,۰,\,۴+۲\tan t+۲\tan^{۳}t\right)}|_{t=۰}=\overrightarrow{(۰,۰,۴)}$$

$$\mathbf{r}'''(۰)=\overrightarrow{\left(۲+۸\tan^{۲}t+۶\tan^{۴}t,\,۰,\,۲+۸\tan^{۲}t+۶\tan^{۴}t\right)}|_{t=۰}$$
$$=\overrightarrow{(۲,۰,۲)}$$

$$\mathbf{r}'(۰)\times\mathbf{r}''(۰)=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ ۱&۱&۱\\ ۰&۰&۴\end{vmatrix}=\overrightarrow{(۴,-۴,۰)}$$

پس، بنابه تعریف سرعت، شتاب، انحناء و تاب در لحظهٔ شروع، به ترتیب عبارتند از

$$\mathbf{v}(۰)=\mathbf{r}'(۰)=\overrightarrow{(۱,۱,۱)}$$
$$\mathbf{a}(۰)=\mathbf{r}''(۰)=\overrightarrow{(۰,۰,۴)}$$
$$\kappa(۰)=\frac{\|\mathbf{r}'(۰)\times\mathbf{r}''(۰)\|}{\|\mathbf{r}'(۰)\|^{۳}}=\frac{\sqrt{۱۶+۱۶+۰}}{\left(\sqrt{۱+۱+۱}\right)^{۳}}=\frac{۴\sqrt{۲}}{۳\sqrt{۳}}$$



شکل ۱۷.۲: (الف) مسألهٔ ۵ از امتحان نهم (ب) مسألهٔ ۷ از امتحان نهم

$$\tau(\circ)=\frac{(\mathbf{r}'(\circ)\times\mathbf{r}''(\circ))\bullet\mathbf{r}'''(\circ)}{\|\mathbf{r}'(\circ)\times\mathbf{r}''(\circ)\|^۲}=\frac{\overrightarrow{(۴,-۴,\circ)}\bullet\overrightarrow{(۲,\circ,۲)}}{\left(\sqrt{۱٦+۱٦+\circ}\right)^۲}=\frac{۱}{۴}$$

پسخ مسأله ۵) کرهٔ $x^۲+y^۲+z^۲=۱٦$ و سهمیگون بیضوی $x^۲+z^۲=٦y$ را قطع داده به معادلهٔ $y^۲+٦y=۱٦$ و یا $y^۲+٦y-۱٦=\circ$ می‌رسیم. پس $y=\frac{-٦\pm\sqrt{۱\circ\circ}}{۲}$ یا $y=\frac{-٦\pm۱\circ}{۲}$. یعنی، $y=۲$ یا $y=-۸$. چون در کرهٔ $x^۲+y^۲+z^۲=۱٦$ هیچ‌گاه y برابر -۸ نمی‌شود $(-۴\leq y\leq ۴)$ پس $y=-۸$ جواب خارجی است و $y=۲$ را می‌پذیریم. لذا مقطع کره و سهمی گون داده شده، دایرهٔ $y=۲$ و $C\ :\ x^۲+z^۲=٦y$ است.به بیان دیگر، دایرهٔ $y=۲$ و $C\ :\ x^۲+z^۲=۱۲$ (به شکل ۱۷.۲—(الف) توجه شود).

نتیجه این موضوع، آن است که تصویر ناحیه مورد بحث بر صفحه xOz عبارت از $D\ :\ x^۲+z^۲\leq ۱۲$ است. اما اگر (x,y,z) در حجم مورد نظر واقع باشد، آنگاه مطابق (شکل ۱۷.۲—(الف)) بایستی y از سهمیگون بزرگتر، و از کره کوچکتر باشد. معادله سهمی گون $y=\frac{x^۲+z^۲}{٦}$ است و معادلهٔ کره عبارت است از $y=\pm\sqrt{۱٦-x^۲-z^۲}$ که حالت مثبت مورد قبول است. بنابراین

$$V\ =\ \left\{(x,y,z)\,|\,(x,z)\in D,\frac{۱}{٦}\left(x^۲+z^۲\right)\leq y\leq\sqrt{۱٦-x^۲-z^۲}\right\}$$

$$\mathrm{Vol}\,(V)\ =\ \iiint\limits_V dxdydz=\iint\limits_D\left[\int_{(x^۲+z^۲)/٦}^{\sqrt{۱۹-x^۲-z^۲}}dy\right]dxdz$$

$$
\begin{aligned}
&= \iint\limits_{D} \left(\sqrt{۱۶ - x^{۲} - z^{۲}} - \frac{۱}{۶}\left(x^{۲} + z^{۲}\right) \right) dxdz \\
&\overset{(۱)}{=} \iint\limits_{D'} \left(\sqrt{۱۶ - r^{۲}} - \frac{۱}{۶} r^{۳} \right) r dr d\theta \\
&= \int_{\circ}^{۲\pi} \left[\int_{\circ}^{\sqrt{۱۲}} \left(\sqrt{۱۶ - r^{۲}}\, r - \frac{۱}{۶} r^{۳} \right) dr \right] d\theta \\
&= \int_{\circ}^{۲\pi} \left[\frac{-۱}{۲} \frac{\left(۱۶ - r^{۲}\right)^{۳/۲}}{۳/۲} - \frac{۱}{۶}\frac{r^{۴}}{۴} \right]_{\circ}^{\sqrt{۱۲}} d\theta = \frac{۷۶}{۳}\pi
\end{aligned}
$$

توضیح اینکه در تساوی (۱) از تغییر متغیر استاندارد $x = r\cos\theta$ و $z = r\sin\theta$ استفاده کرده‌ایم. در این صورت $J = r$ و تصویر D عبارت است از

$$D' \,:\, \circ \leq \theta \leq ۲\pi \,,\, \circ \leq r \leq \sqrt{۱۲}$$

برای محاسبهٔ مساحت سطح خارجی V، ابتدا این سطح S را به صورت دو تکه معرفی می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
&S_{۱} \,:\, f_{۱} = x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} - ۱۶ \,;\, y \leq ۲ \,;\, (x,z) \in D \\
&S_{۲} \,:\, f_{۲} = x^{۲} + z^{۲} - ۶y \,;\, (x,z) \in D
\end{aligned}
$$

سپس، مطابق معمول، داریم

$$
\begin{aligned}
d\sigma_{۱} &= \frac{\|\nabla f_{۱}\|}{|\frac{\partial f}{\partial y}|} dxdz = \frac{\|\overrightarrow{(۲x, ۲y, ۲z)}\|}{|۲y|} dxdz \\
&= \frac{\sqrt{۴x^{۲} + ۴y^{۲} + ۴z^{۲}}}{|۲y|} dxdz = \frac{۴}{y} dxdz = \frac{۴ dxdz}{\sqrt{۱۶ - x^{۲} - z^{۲}}} \\
d\sigma_{۲} &= \frac{\|\nabla f_{۲}\|}{|\frac{\partial f_{۲}}{\partial y}|} dxdz = \frac{\|\overrightarrow{(۲x, -۶, ۲z)}\|}{|-۶|} dxdy \\
&= \frac{\sqrt{۴x^{۲} + ۳۶ + ۴z^{۲}}}{|۶|} dxdz = \frac{۱}{۳}\sqrt{x^{۲} + z^{۲} + ۹}\, dxdz
\end{aligned}
$$

بنابراین

$$\text{Area}\,(S_{۱}) = \iint\limits_{(S_{۱})} d\sigma = \iint\limits_{D} \frac{۴ dxdz}{\sqrt{۱۶ - x^{۲} - z^{۲}}}$$

$$= \int_{\circ}^{\text{۲}\pi}\left[\int_{\circ}^{\sqrt{\text{۱۲}}}\frac{\text{۴}rdr}{\sqrt{\text{۱۶}-r^{\text{۲}}}}\right]d\theta = \int_{\circ}^{\text{۲}\pi}\left[-\text{۴}\left(\text{۱۶}-r^{\text{۲}}\right)^{\text{۱}/\text{۲}}\right]_{\circ}^{\sqrt{\text{۱۲}}}d\theta$$

$$= \int_{\circ}^{\text{۲}\pi}\text{۸}d\theta = \text{۸}\Big[\theta\Big]_{\circ}^{\text{۲}\pi} = \text{۱۶}\pi$$

$$\mathrm{Area}\,(S_{\text{۱}}) = \iint\limits_{S_{\text{۲}}} d\sigma = \iint\limits_{D}\frac{\text{۱}}{\text{۳}}\sqrt{x^{\text{۲}}+z^{\text{۲}}+\text{۹}}dxdz$$

$$= \frac{\text{۱}}{\text{۳}}\int_{\circ}^{\text{۲}\pi}\left[\int_{\circ}^{\sqrt{\text{۱۲}}}\sqrt{r^{\text{۲}}+\text{۹}}rdr\right]d\theta = \frac{\text{۱}}{\text{۹}}\int_{\circ}^{\text{۲}\pi}\left[\left(r^{\text{۲}}+\text{۹}\right)^{\text{۳}/\text{۲}}\right]_{\circ}^{\sqrt{\text{۱۲}}}d\theta$$

$$= \frac{\text{۱}}{\text{۳}}\int_{\circ}^{\text{۲}\pi}\left(\text{۷}\sqrt{\text{۲۱}}-\text{۹}\right)d\theta = \frac{\text{۲}\pi}{\text{۳}}\left(\text{۷}\sqrt{\text{۲۱}}-\text{۹}\right)$$

بنابراین مساحت سطح خارجی V برابر است بامجموع مساحت این دو قطعه، یعنی

$$\mathrm{Area}(S) = \text{۱۶}\pi + \frac{\text{۲}\pi}{\text{۳}}\left(\text{۷}\sqrt{\text{۲۱}}-\text{۹}\right)$$

برای محاسبهٔ گشتاور ماند حول محور y ها از فرمول کلاسیک

$$I_y = \iiint\limits_{V}\left(x^{\text{۲}}+z^{\text{۲}}\right)\delta\,dxdydz$$

استفاده می‌کنیم. بنابراین

$$I_y = \iiint\limits_{V}\left(x^{\text{۲}}+z^{\text{۲}}\right)\delta dxdydz = \iint\limits_{D}\left[\int_{\frac{\text{۱}}{\text{۶}}\left(x^{\text{۲}}+z^{\text{۲}}\right)}^{\sqrt{\text{۱۶}-x^{\text{۲}}-z^{\text{۲}}}}\left(x^{\text{۲}}+z^{\text{۲}}\right)dy\right]dxdz$$

$$= \iint\limits_{D}\left(x^{\text{۲}}+z^{\text{۲}}\right)\left(\sqrt{\text{۱۶}-x^{\text{۲}}-z^{\text{۲}}}-\frac{\text{۱}}{\text{۶}}\left(x^{\text{۲}}+z^{\text{۲}}\right)\right)dxdz$$

$$= \int_{\circ}^{\text{۲}\pi}\left[\int_{\circ}^{\sqrt{\text{۱۲}}}r^{\text{۲}}\left(\sqrt{\text{۱۶}-r^{\text{۲}}}-\frac{\text{۱}}{\text{۶}}r\right)drd\right]d\theta$$

$$= \left(\int_{\circ}^{\text{۲}\pi}d\theta\right)\left(\int_{\circ}^{\sqrt{\text{۱۲}}}r^{\text{۳}}\sqrt{\text{۱۶}-r^{\text{۲}}}dr\right) - \left(\int_{\circ}^{\text{۲}\pi}d\theta\right)\left(\int_{\circ}^{\sqrt{\text{۱۲}}}\frac{r^{\text{۵}}}{\text{۶}}dr\right)$$

$$\stackrel{(\text{۱})}{=} \Big[\theta\Big]_{\circ}^{\text{۲}\pi}\int_{\text{۱۶}}^{\text{۴}}\frac{-\text{۱}}{\text{۲}}\left(\text{۱۶}-u\right)\sqrt{u}du - \frac{\text{۱}}{\text{۶}}\Big[\theta\Big]_{\circ}^{\text{۲}\pi}\left[\frac{r^{\text{۶}}}{\text{۶}}\right]_{\circ}^{\sqrt{\text{۱۲}}}$$

$$= \text{۲}\pi\left[\frac{-\text{۱۶}}{\text{۲}}\frac{u^{\text{۳}/\text{۲}}}{\frac{\text{۳}}{\text{۲}}} + \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\frac{u^{\text{۵}/\text{۲}}}{\frac{\text{۵}}{\text{۲}}}\right]_{\text{۱۶}}^{\text{۴}} - \frac{\text{۱}}{\text{۶}}\times\text{۲}\pi\times\frac{\text{۱۲}^{\text{۳}}}{\text{۶}}$$

$$= \frac{\text{۱۶}\pi}{\text{۱۵}}\times\text{۱۸۸}-\text{۶۹}\pi = \frac{\text{۱۵۶۸}}{\text{۱۵}}\pi$$

توضیح اینکه در تغییر (۱) متغیر $u = r^{۲} - ۱۹$، استفاده شده است.

پاسخ مسأله ٦) در اینجا میدان برداری مورد بحث عبارت است از

$$\mathbf{F} = \overrightarrow{\left(x^{۲} - yz, y^{۲} - zx, z^{۲} - xy\right)}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\operatorname{Curl}(\mathbf{F}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x^{۲} - yz & y^{۲} - zx & z^{۲} - xy \end{vmatrix} \\ &= \overrightarrow{(-x + x, -y + y, -z + z)} = \overrightarrow{(\circ, \circ, \circ)}\end{aligned}$$

بنابراین یدان $\mathbf{F}$ ابقائی (کانسرواتیو) است. برای به دست آوردن پتانسیل آن، با فرض ثابت بودن (z, y, x) از میدان $\mathbf{F}$ بر منحنی $E : \mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(tx, ty, tz)}\ ;\ \circ \leq t \leq ۱$ انتگرال می‌گیریم:

$$\begin{aligned}f(x, y, z) = \int_E \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_\circ^۱ &\left\{\left((xt)^{۲} - (yt)(zt)\right)\, d(xt)\right. \\ &\left.+ \left((yt)^{۲} - (zt)(xt)\right)\, d(yt) + \left((zt)^{۲} - (xt)(yt)\right)\, d(zt)\right\} \\ = &\int_\circ^۱ \left\{\left(x^{۲} - zy\right) t^{۲} x dt + \left(yz^{۲} - zx\right) t^{۲} y dt + \left(z^{۲} - xy\right) t^{۲} z dt\right\} \\ = &\int_\circ^۱ \left(x^{۳} + y^{۳} + z^{۳} - ۳xyz\right) t^{۲} dt \\ = &\left(x^{۳} + y^{۳} + z^{۳} - ۳xyz\right) \left[\frac{t^{۳}}{۳}\right]_\circ^۱ = \frac{x^{۳}}{۳} + \frac{y^{۳}}{۳} + \frac{z^{۳}}{۳} - xyz\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\text{انتگرال خواسته شده} &= f\,(\text{انتهای مسیر}) - f\,(\text{ابتدای مسیر}) \\ &= f(\mathbf{r}(۲\pi)) - f(\mathbf{r}(\circ)) = f(a, \circ, h) - f(a, \circ, \circ) \\ &= \left(\frac{a^{۳}}{۳} + \circ + \frac{h^{۳}}{۳} - \circ\right) - \left(\frac{a^{۳}}{۳} + \circ + \circ - \circ\right) = \frac{h^{۳}}{۳}\end{aligned}$$

پاسخ مسأله ۷) بالای صفهٔ xOy مجموعهٔ نقاطی است که برای آنها $z \geq \circ$. پس بایستی $۴ - x^{۲} - y^{۲} \geq \circ$ یا $D : x^{۲} + y^{۲} \leq ۴$. بنابراین،

$$S : f = x^{۲} + y^{۲} + z - ۴ = \circ\ ;\ (x, y) \in D$$

این سطح عبارت از یک سهمیگون است به رأس در $(\circ, \circ, ۴)$ و رو به پایین است (به شکل ۱۷.۲—(ب) توجه شود).

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{\|\nabla f\|}{|\frac{\partial f}{\partial z}|}dxdy = \frac{\|\overrightarrow{(۲x, ۲y, ۱)}\|}{|۱|}dxdy \\ &= \sqrt{۴x^۲ + ۴y^۲ + ۱}dxdy \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \text{Area}(S) &= \iint\limits_{(S)} d\sigma = \iint\limits_{D} \sqrt{۴x^۲ + ۴y^۲ + ۱}dxdy \\ &\overset{(۱)}{=} \iint\limits_{D'} \sqrt{۴r^۲ + ۱}rdrd\theta = \int_\circ^{۲\pi} \left[\int_\circ^۲ \sqrt{۴r^۲ + ۱}rdr\right] d\theta \\ &= \int_\circ^{۲\pi} \left[\frac{۱}{۱۲}\left(۴r^۲ + ۱\right)^{۳/۲}\right]_\circ^۲ d\theta = \int_\circ^{۲\pi} \frac{۱}{۱۲}\left(۱۷\sqrt{۱۷} - ۱\right) d\theta \\ &= \frac{\pi}{۶}\left(۱۷\sqrt{۱۷} - ۱\right) \end{aligned}$$

توضیح اینکه در تساوی (۱) از تغییر مختصات قطبی استفاده کرده‌ایم. تصویر D عبارت است از $D' \, : \, \circ \leq \theta \leq ۲\pi \, , \, \circ \leq r \leq ۲$.

پاسخ مسأله ۸) سهمیگون $z = ۴ - x^۲ - y^۲$ با رأس در ۴ و رو به پایین است. صفحهٔ $z = ۵ - ۲x - ۲y$ محود z ها را در ۵ و محور x ها و محور y ها را در ۵/۲ قطع می‌کند (به شکل ۱۸.۲ توجه شود). منحنی جدا شده توسط صفحه از سهمیگون عبارتست از: $C \, : \, z = -x^۲ - y^۲ + ۴, z = ۵ - ۲x - ۲y$.

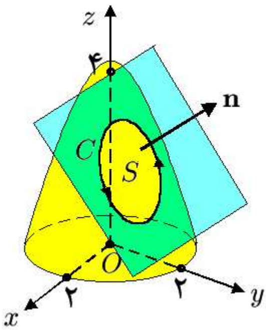
از حل دو معادله داده شده در یک دستگاه، به دست می‌آوریم

$$-x^۲ - y^۲ + ۴ = ۵ - ۲x - ۲y$$

یا $x^۲ - ۲x + y^۲ - ۲y + ۱ = \circ$. بنابراین، پس از مربع کامل کردن، داریم $(x - ۱)^۲ + (y - ۱)^۲ = ۱$؛ که داره‌ای به مرکز $(۱, ۱)$ و شعاع یک در صفحه xOy است. یعنی، تصویر قسمت جدا شده از سطح، بر صفحه xOy عبارت است از $D \, : \, (x - ۱)^۲ + (y - ۱)^۲ \leq ۱$. فرض کنیم که C لبه سطح

$$S \, : \, f = ۲x + ۲y + z - ۵ = \circ \, ; \, (x, y) \in D$$

است و n رو به بالا است (یعنی، مؤلفه z آن مثبت است) زیرا باید همواره «روی سطح» در سمت چپ «بردار مماس به منحنی» C باشد (به شکل ۱۸.۲ توجه شود).



شکل ۱۸.۲: پاسخ مسألهٔ ۸ از امتحان نهم

برای محاسبه $\oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ باید منحنی C را پارامتره کنیم:

$$C\ :\ (x-۱)^{۲}+(y-۱)^{۲}=۱\ ,\ z=۵-۲x-۲y$$

کافی است فرض کنیم $x-۱=\cos t$ و $y-۱=\sin t$، بنابراین، با قرار دادن این مقادیر در رابطهٔ $z=۵-۲x-۲y$ داریم $z=۱-۲\cos t-۲\sin t$. در نتیجه

$$C\ :\ \mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(۱+\cos t,\ ۱+\sin t,\ ۱-۲\cos t-۲\sin t)}\ ;\ ۰\leq t\leq ۲\pi$$

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} &= \int_۰^{۲\pi} \mathbf{F}\,(۱+\cos,\ ۱+\sin t,\ ۱-۲\cos t-۲\sin t)\\ &\quad \bullet\,\overrightarrow{(-\sin t,\cos t,\ ۲\sin t-۲\cos t)}\,dt\\ &= \int_۰^{۲\pi} \overrightarrow{(۱+\cos t,\ ۱+\sin t,\ ۲-\cos t-۲\sin t)}\,\bullet\\ &\quad \overrightarrow{(-\sin t,\cos t,\ ۲\sin t-۲\cos t)}\,dt\\ &= \int_۰^{۲\pi}\Big(۲\cos^{۲}t-۴\sin^{۲}t+۲\cos t\sin t-۳\cos t+۳\sin t\Big)\,dt\\ &= \int_۰^{۲\pi}\left((۱+\cos ۲t)-۲\,(۱-\cos ۲t)+\sin ۲t-۳\cos t+۳\sin t\right)\,dt\\ &= \left[-t+\frac{۳}{۲}\sin ۲t-\frac{۱}{۲}\cos ۲t-۳\sin t-۳\cos t\right]_۰^{۲\pi}=-۲\pi\end{aligned}$$

برای محاسبه W با استفاده از قضیه استوکس لازم است که کرل $\mathbf{F}$ را بیابیم:

$$\begin{aligned}\mathrm{Curl}\,(\mathbf{F}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x & y & z+z \end{vmatrix} \\ &= \overrightarrow{(۰-۰, ۰-۱, ۰-۰)} = \overrightarrow{(۰, -۱, ۰)}\end{aligned}$$

به علاوه

$$\mathbf{n} = \pm\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \pm\frac{\overrightarrow{(۲, ۲, ۱)}}{\sqrt{۴+۴+۱}} = \pm\overrightarrow{\left(\frac{۲}{۳}, \frac{۲}{۳}, \frac{۱}{۳}\right)}$$

که چون $\mathbf{n}$ رو به بالا است، باید مؤلفه z مثبت باشد، و لذا حالت $+$ مورد قبول است. همچنین

$$d\sigma = \frac{\|\nabla f\|}{|\frac{\partial f}{\partial z}|}dxdy = \frac{\sqrt{۴+۴+۱}}{|۱|}dxdy = ۳dxdy$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\iint\limits_{(S)} \mathrm{Curl}\,(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{n} d\sigma &= \iint\limits_{D} \overrightarrow{(۰, -۱, ۰)} \bullet \overrightarrow{\left(\frac{۲}{۳}, \frac{۲}{۳}, \frac{۱}{۳}\right)} ۳dxdy \\ &= \iint\limits_{D} (-۲)\ dxdy = -۲\mathrm{Area}(D) = -۲ \times \left(\pi \times (۱)^۲\right) = -۲\pi\end{aligned}$$

این خواسته ما را برآورده می‌کند یعنی ثابت می‌کند که

$$\oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint\limits_{(S)} \mathrm{Curl}\,(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}\, d\sigma$$

۱۰.۲ امتحان دهم

صورت مسایل

۱) معادله صفحه‌ای را بیابید که از نقطهٔ $P\left(۱,۲,۳\right)$ گذشته و موازی صفحه قائم بر رویه‌های $x^۲+y^۲+z^۲ = ۲$ و $۳x-y-۵y^۲ = ۷$ در نقطهٔ $P_۰\left(۱,۰,-۱\right)$ باشد.

۲) بردارهای سرعت و شتاب و مقدار شعاع انحناء منحنی

$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{\left(e^t, \sin\left(e^t+۱\right), \cos\left(e^t+۱\right)\right)}$$

را به ازای $t = ۰$ بیابید.

۳) تابع $z = \ln\left(x+۱/y\right)$ در کدام نقاط پیوسته نیست، نقطه‌ای را تعیین کنید که گرادیان این تابع در این نقطه برابر بردار $\mathbf{i} - \frac{۱۶}{۹}\mathbf{j}$ باشد، همچنین $\operatorname{div}\left(\operatorname{grad}(z)\right)$ را محاسبه کنید.

۴) گشتاور ماند ناحیهٔ D داخل بیضی به معادلهٔ $x^۲+y^۲/۴ = ۱$ با چگالی ثابت k نسبت به محور z ها را بیابید.

۵) مطلوبست محاسبهٔ $I = \iiint_V z^۲\, dxdydz$ که در آن ناحیه V محصور به کره‌های توپر $x^۲+y^۲+z^۲ \leq ۱$ و $x^۲+y^۲+z^۲ \leq ۲z$ می‌باشد.

۶) انتگرال سطح $\iint_S x\, dydz + y\, dzdx + z\, dxdy$ که در آن S کره $x^۲+y^۲+z^۲ = ۱$ است را محاسبه کنید.

۷) درستی قضیهٔ استوکس را برای تابع برداری $\mathbf{F} = \overrightarrow{\left(x+y, z, y\right)}$ و سطح S که قسمتی از سطح $x^۲+y^۲-z^۲ = -۱$ محدود به صفحه $z = ۲$ است، تحقیق کنید.

۸) با استفاده از قضیهٔ گرین انتگرال $I = \int_C \left(y^۲-x\right)\, dy + \left(x^۲+۲xy\right)\, dx$ را محاسبه کنید، که در آن، C منحنی حاصل از تلاقی $z = -x^۲-y^۲+۵$ با صفحهٔ xOy است (و جهت انتگرال‌گیری در جهت مثلثاتی است).

حل مسایل

پاسخ مسأله ۱) می‌دانیم که اگر $S : f\left(x,y,z\right) = ۰$ یک رویه باشد و $X_۰ \in S$، آنگاه $\nabla f|_{X_۰}$ در نقطهٔ $X_۰$ به S عمود است. به علاوه صفحهٔ با بردار قائم $\mathbf{n}$ در صورتی

بر S عمود است که $\mathbf{n}$ بر $\nabla f|x_\circ$ عمود باشد. بنابراین، مطابق فرض مسأله، $\mathbf{n}$ عمود بر $\nabla f_۱|p_\circ$ است و نیز عمود بر $\nabla f_۲|p_\circ$ که در اینجا $f_۱ = x^۲ + y^۲ + z^۲ - ۲$ و $f_۲ = ۳x - y - ۵y^۲ - ۷$. اما از طرفی

$$\begin{aligned}\nabla f_۱|_{P_\circ} &= \overrightarrow{(۲x, ۲y, ۲z)}|_{P_\circ} = \overrightarrow{(۲, \circ, -۲)}\\ \nabla f_۲|_{P_\circ} &= \overrightarrow{(۳, -۱ - ۱\circ y, \circ)}|_{P_\circ} = \overrightarrow{(۳, -۱, \circ)}\end{aligned}$$

بنابراین

$$\mathbf{n} = \nabla f_۱|_{P_\circ} \times \nabla f_۲|_{P_\circ} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۲ & \circ & -۲ \\ ۳ & -۱ & \circ \end{vmatrix} = \overrightarrow{(-۲, -٦, -۲)}$$

پس معادلهت صفحه‌ای که از P عمود بر $\mathbf{n}$ می‌گذرد، عبارتست از

$$-۲\,(x - ۱) - ٦\,(y - ۲) - ۲\,(z - ۳) = \circ$$

یا $x + ۳y + z = ۱\circ$.

پاسخ مسأله ۲) برای به دست آوردن اشیاء مورد نظر، لازم است $\mathbf{r}'(\circ)$ و $\mathbf{r}''(\circ)$ را محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(\circ) &= \overrightarrow{\left(e^t, e^t \cos\left(e^t + ۱\right), -e^t \sin\left(e^t + ۱\right)\right)}|_{t=\circ} = \overrightarrow{(۱, \cos ۲, -\sin ۲)}\\ \mathbf{r}''(\circ) &= \overline{\left(e^t, e^t \cos\left(e^t + ۱\right) - e^{۲t} \sin\left(e^t + ۱\right),\right.}\\ &\qquad \overrightarrow{\left. - e^t \sin\left(e^t + ۱\right) - e^{۲t} \cos\left(e^t + ۱\right)\right)}|_{t=\circ}\\ &= \overrightarrow{(۱, \cos ۲ - \sin ۲, -\sin ۲, -\cos ۲)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'(\circ) \times \mathbf{r}''(\circ) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۱ & \cos ۲ & -\sin ۲ \\ ۱ & \cos ۲ - \sin ۲ & -\sin ۲ - \cos ۲ \end{vmatrix}\\ &= \overrightarrow{(-۱, \cos ۲, -\sin ۲)}\end{aligned}$$

بنابراین، سرعت متحرک در $t = \circ$ برابر $\mathbf{v}(\circ) = \mathbf{r}'(\circ) = \overrightarrow{(۱, \cos ۲, -\sin ۲)}$ است و شتاب آن برابر $\mathbf{a}(\circ) = \mathbf{r}''(\circ) = \overrightarrow{(۱, \cos ۲, -\sin ۲, -\sin ۲ - \cos ۲)}$ است. به

علاوه انحناء منحنی در $t = ۰$ برابر است با

$$\kappa(۰) = \frac{\|\mathbf{r}'(۰) \times \mathbf{r}''(۰)\|}{\|\mathbf{r}'(۰)\|^۳} = \frac{\sqrt{(-۱)^۲ + (\cos ۲)^۲ + (-\sin ۲)^۲}}{\left(\sqrt{(۱)^۲ + (\cos ۲)^۲ + (-\sin ۲)^۲}\right)^۳} = \frac{۱}{۲}$$

بنابراین، شعاع انحناء در $t = ۰$ برابر است با ۲ $R(۰) = ۱/\kappa(۰) = ۲$.

پاسخ مسأله ۳) تابع $f(x,y) = \ln\left(x + \frac{۱}{y}\right)$ مقدماتی است، پس در هر کجا که تعریف شود پیوسته است. بنابراین، کافی است که دامنهٔ f را مشخص کنیم: شرط تعریف شدن $\ln\left(x + \frac{۱}{y}\right)$ این است که $x + \frac{۱}{y} > ۰$. یعنی، f در (x,y) هایی پیوسته است که $x + \frac{۱}{y} > ۰$ و (x,y) هایی ناپیوسته است که $x + \frac{۱}{y} \leq ۰$.

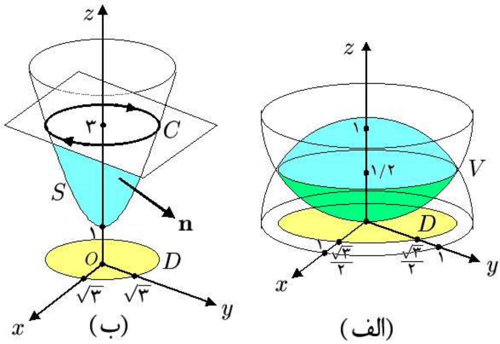
$\operatorname{grad}(z) = \overrightarrow{\left(\frac{۱}{x + ۱/y}, \frac{-۱/y^۲}{x + ۱/y}\right)}$، پس اگر بنا باشد $\operatorname{grad}(z) = \mathbf{i} - \frac{۱۶}{۹}\mathbf{j}$، آنگاه $\frac{۱}{x+۱/y} = ۱$ و $\frac{-۱}{y^۲}\frac{۱}{x+۱/y} = \frac{-۱۶}{۹}$. پس، از قرار دادن تساوی اول در تساوی دوم، داریم $\frac{-۱}{y^۲} = \frac{-۱۶}{۹}$ یا $y^۲ = \frac{۹}{۱۶}$. بنابراین، $y = \pm\frac{۳}{۴}$.

حال اگر $y = \frac{۳}{۴}$، آنگاه $\frac{۱}{x+۴/۳} = ۱$ یا $x = ۱ - \frac{۴}{۳} = \frac{-۱}{۳}$؛ و اگر $y = -\frac{۳}{۴}$، آنگاه $\frac{۱}{x-۴/۳} = ۱$ یا $x = ۱ + \frac{۴}{۳} = \frac{۷}{۳}$. پس نقاط مورد نظر عبارتند از $X_۱ = \left(-\frac{۱}{۳}, \frac{۳}{۴}\right)$ و $X_۲ = \left(\frac{۷}{۳}, \frac{-۳}{۴}\right)$.

برای محاسبهٔ $\operatorname{div}(\operatorname{grad}(z))$ به صورت زیر عمل می‌کنیم

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\operatorname{grad}(z)) &= \operatorname{div}\overrightarrow{\left(\frac{۱}{x + \frac{۱}{y}}, \frac{\frac{-۱}{y^۲}}{x + \frac{۱}{y}}\right)} \\
&= \operatorname{div}\overrightarrow{\left(\frac{y}{xy + ۱}, \frac{-۱}{xy^۲ + y}\right)} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-y}{xy + ۱}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-۱}{xy^۲ + y}\right) \\
&= \frac{-y^۲}{(xy + ۱)^۲} + \frac{۲xy + ۱}{(xy^۲ + y)^۲} = \frac{-y^۴ + ۲xy + ۱}{(xy^۲ + y)^۲}
\end{aligned}$$

پاسخ مسأله ۴) ناحیه $D : x^۲ + y^۲/۴ \leq ۱$ در صفحه xOyس واقع است و محور z ها در $O = (۰,۰)$ به این صفحه عمود است. پس گشتاور حول محور z ها به معنی گشتاور حول O است. یعنی بایستی $I_۰(D) = \iint_D \left(x^۲ + y^۲\right)\delta(x,y)\, dxdy$



شکل ۱۹.۲: (الف) مسألهٔ ۴ از امتحان دهم (ب) مسألهٔ ۷ از امتحان دهم

را محاسبه کنیم، که در اینجا $\delta(x,y) = k$. برای حل این انتگرال، از تغییر مختصات $x = r\cos\theta$ و $y = ۲r\sin\theta$ استفاده می‌کنیم، تا مخرج ۴ در $y^۲$ حذف شود. اما در این صورت تصویر D در صفحه $rO\theta$ عبارت است از $D' : r^۲ \le ۱$ یا $D' : ۰ \le \theta \le ۲\pi\,,\ ۰ \le r \le ۱$. به علاوه

$$J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = \left|\det\begin{bmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta \\ ۲\sin\theta & ۲r\cos\theta\end{bmatrix}\right| = ۲r$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} I_O(D) &= \iint\limits_D \left(x^۲+y^۲\right)k\,dxdy = \iint\limits_{D'} r^۲k \times ۲r\,drd\theta \\ &= ۲k\int_۰^{۲\pi}\left[\int_۰^۱ r^۳\,dr\right]d\theta = ۲k\int_۰^{۲\pi}\left[\frac{r^۴}{۴}\right]_۰^۱ d\theta \\ &= ۲k\int_۰^{۲\pi}\frac{۱}{۴}d\theta = \frac{k}{۲}\Big[\theta\Big]_۰^{۲\pi} = k\pi \end{aligned}$$

پاسخ مسأله ۵) $x^۲+y^۲+z^۲ = ۱$ معادلهٔ کره‌ای به مرکز مبداء و شعاع یک است. $x^۲+y^۲+z^۲ = ۲z$ پس از مربع کامل کردن به صورت $x^۲+y^۲+(z-۱)^۲ = ۱$ نوشته می‌شود که معادلهٔ کره‌ای به مرکز $(۰,۰,۱)$ و شعاع یک است (به شکل ۱۹.۲– (الف) توجه شود).

محل برخورد این دو کره، $۲z = ۱$ یا $z = \frac{۱}{۲}$ است. بنابراین با قرار دادن $z = \frac{۱}{۲}$ در هر یک از معادلات داده شده، به دست می‌آوریم که $x^۲+y^۲ = \frac{۳}{۴}$. بنابراین تصویر حجم V بر صفحهٔ xOy عبارت است از $D : x^۲+y^۲ \le \left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^۲$.

همانطوری که در شکل ۱۹.۲—(الف) دیده می‌شود، از کرهٔ ۱ $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ نیمهٔ بالایی، یعنی $z=\sqrt{۱-x^۲-y^۲}$ در بالای شکل واقع است و نیمهٔ پایینی کرهٔ $x^۲+y^۲+(z-۱)^۲=۱$، یعنی $z=۱-\sqrt{۱-x^۲-y^۲}$ در پایین شکل واقع است. به بیان دیگر

$$V=\left\{(x,y,z)\;\middle|\;(x,y)\in D,\, ۱-\sqrt{۱-x^۲-y^۲}\le z\le\sqrt{۱-x^۲-y^۲}\right\}$$

پس، تصویر V در فضای $Or\theta z$ عبارت است از

$$V'=\left\{(r,\theta,z)\;\middle|\;۰\le\theta\le ۲\pi,\, ۰\le r\le\frac{\sqrt{۳}}{۲},\, ۱-\sqrt{۱-r^۲}\le z\le\sqrt{۱-r^۲}\right\}$$

در نتیجه،

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_V x^۲\,dxdydz &= \iiint\limits_{V'}(r\cos\theta)^۲\,rdrd\theta dz\\
&= \int_۰^{۲\pi}\left[\int_۰^{\sqrt{۳}/۲}\left[\int_{۱-\sqrt{۱-r^۲}}^{\sqrt{۱-r^۲}} r^۳\cos^۲\theta dz\right]dr\right]d\theta\\
&= \int_۰^{۲\pi}\left[\int_۰^{\sqrt{۳}/۲}\left[zr^۳\cos^۲\theta\right]_{۱-\sqrt{۱-r^۲}}^{\sqrt{۱-r^۲}}dr\right]d\theta\\
&= \int_۰^{۲\pi}\left[\int_۰^{\sqrt{۳}/۲}\left(۲\sqrt{۱-r^۲}-۱\right)r^۳\cos^۲\theta dr\right]d\theta\\
&= \left(\int_۰^{۲\pi}\cos^۲\theta d\theta\right)\left(\int_۰^{\sqrt{۳}/۲}\left(۲\sqrt{۱-r^۲}-۱\right)r^۳dr\right)\\
&\overset{(۱)}{=} \left(\int_۰^{۲\pi}\frac{۱-\cos^۲\theta}{۲}d\theta\right)\left(\int_۱^{۱/۲}(۲u-۱)\left(۱-u^۲\right)(-u\,du)\right)\\
&= \frac{۱}{۲}\left[\theta+\frac{۱}{۲}\sin(۲\theta)\right]_۰^{۲\pi}\left[\frac{u^۵}{۵}-\frac{u^۴}{۴}-۲\frac{u^۳}{۳}+\frac{u^۲}{۲}\right]_۱^{۱/۲}\\
&= \frac{۱}{۲}(۲\pi)\left(\frac{۵۳}{۹۶۰}\right)=\frac{۵۳\pi}{۱۹۲۰}
\end{aligned}$$

توضیح اینکه در (۱) فرض شده است $u=\sqrt{۱-r^۲}$.

پاسخ مسٔله ٦) چون سطح S بسته است و میدان برداری $\mathbf{F}=\overrightarrow{(x,y,z)}$ پیوسته و مشتق‌پذیر است، پس از قضیهٔ دیورژانس می‌شود استفاده کرد. اما داخل S عبارت است

از کرهٔ توپر $V : x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} \leq ۱$ و

$$\mathrm{div}\,(\mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = ۳$$

بنابراین،

$$\begin{aligned}\iint\limits_{(S)} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n} d\sigma &= \iiint\limits_{V} \mathrm{div}\,(\mathbf{F})\ dxdydz = \iiint\limits_{V} ۳\, dxdydz \\ &= ۳\mathrm{Vol}\,(V) = ۳ \times \left(\frac{۴}{۳} \times \pi \times (۱)^{۳}\right) = ۴\pi\end{aligned}$$

توضیح اینکه حجم کره‌ای به شعاع R برابر است با $\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}$.

پاسخ مسأله ۷) معادلهٔ $x^{۲} + y^{۲} - z^{۲} = -۱$ را به صورت $-x^{۲} - y^{۲} + z^{۲} = ۱$ بازنویسی می‌کنیم. پس رویهٔ مورد نظر قسمتی از هزلولی‌گون دوپارچهٔ $-x^{۲} - y^{۲} + z^{۲} = ۱$ است که محور تقارن آن محور z ها است (به شکل ۱۹.۲—(ب) توجه شود) از قرار دادن $z = ۲$ در معادلهٔ هذلولی گون به دست آوریم $x^{۲} + y^{۲} = ۳$ پس تصویر رویه بر صفحهٔ xOy عبارت است از $D : x^{۲} + y^{۲} \leq ۳$ و بنابراین $S : f = -x^{۲} - y^{۲} + z^{۲} - ۱ = ۰; (x, y) \in D$ و $\mathbf{F}$ رو به پایین است (یعنی، مؤلفهٔ z آن منفی است).

$$C : x^{۲} + y^{۲} = ۳,\ z = ۲$$

ابتدا منحنی C را پارامتره می‌کنیم:

چون $x^{۲} + y^{۲} = ۳$ و جهت C عکس جهت مثلثاتی است (به شکل ۱۹.۲—(ب) توجه شود) فرض می‌کنیم $x = \sqrt{۳}\sin t$ و $y = \sqrt{۳}\cos t$. بنابراین

$$C : \mathbf{r}(t) = \overrightarrow{\left(\sqrt{۳}\sin t, \sqrt{۳}\cos t, ۲\right)} \quad ; \quad ۰ \leq t \leq ۲\pi$$

$$\begin{aligned}\oint_{C} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} &= \int_{۰}^{۲\pi} \mathbf{F}\left(\sqrt{۳}\sin t, \sqrt{۳}\cos t, ۲\right) \bullet \overrightarrow{\left(\sqrt{۳}\cos t, -\sqrt{۳}\sin t, ۰\right)}\, dt \\ &= \int_{۰}^{۲\pi} \overrightarrow{\left(\sqrt{۳}\sin t + \sqrt{۳}\cos t, ۲, \sqrt{۳}\cos t\right)} \bullet \overrightarrow{\left(\sqrt{۳}\cos t, -\sqrt{۳}\sin t, ۰\right)}\, dt \\ &= \int_{۰}^{۲\pi} \left(۳\sin t\cos t + ۳\cos^{۲} t - ۲\sqrt{۳}\sin t\right)\, dt \\ &= \left[۳\frac{\sin^{۲} t}{۲} + \frac{۳}{۲}t + \frac{۳}{۴}\sin ۲t + ۲\sqrt{۳}\cos t\right]_{۰}^{۲\pi} = ۳\pi\end{aligned}$$

برای محاسبهٔ این مقدار توسط قضیه استوکس، لازم است که $\mathbf{n}$ و $d\sigma$ را برای S و نیز کرل میدان برداری $\mathbf{F}$ را بیابیم:

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} &= \pm\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \pm\frac{\overrightarrow{(-۲x, -۲y, ۲z)}}{\sqrt{۴x^۲ + ۴y^۲ + ۴z^۲}} = \pm\frac{\overrightarrow{(-x, -y, z)}}{\sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}} \\
d\sigma &= \frac{\|\nabla f\|}{|\partial f/\partial z|}dxdy = \frac{\sqrt{۴x^۲ + ۴y^۲ + ۴z^۲}}{|۲z|}dxdy \\
&= \frac{\sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}}{z}dxdy \\
\mathrm{Curl}\,(\mathbf{F}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x + y & z & y \end{vmatrix} \\
&= \overrightarrow{(۱ - ۱, ۰ - ۰, ۰ - ۱)} = \overrightarrow{(۰, ۰, -۱)}
\end{aligned}$$

که چون $\mathbf{n}$ رو به پایین است، باید مؤلفهٔ z اش منفی باشد، پس در $\mathbf{n}$ (آمده در بالا) حالت $-$ مورد قبول است. در نتیجه

$$\begin{aligned}
\iint_{(S)} \mathrm{Curl}\,(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{n} d\sigma &= \iint_D \overrightarrow{(۰, ۰, -۱)} \bullet \frac{\overrightarrow{(x, y, -z)}}{\sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}} \frac{\sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}}{z} dxdy \\
&= \iint_D ۱\, dxdy = \mathrm{Area}(D) = \pi \times \left(\sqrt{۳}\right)^۲ = ۳\pi
\end{aligned}$$

پاسخ مسألهٔ ۸) منحنی C به صورت مقطع $z = ۰$ با $z = -x^۲ - y^۲ + ۵$ معرفی شده است. یعنی $z = ۰$ ، $C : x^۲ + y^۲ = ۵$. بنابراین داخل C عبارت است از $D : x^۲ + y^۲ \leq ۵$ و بنا به قضیه گرین داریم

$$\begin{aligned}
I &= \oint_C \left(y^۲ - x\right) dy + \left(x^۲ + ۲xy\right) dx \\
&= \oint_C \left(x^۲ + ۲xy\right) dx + \left(y^۲ - x\right) dy \\
&= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(y^۲ - x\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(x^۲ + ۲xy\right)\right] dxdy \\
&= -\iint_D (۱ + ۲x)\, dxdy = -\int_۰^{۲\pi} \left[\int_۰^{\sqrt{۵}} (۱ + ۲r\cos\theta)\, r\, dr\right] d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{۰}^{۲\pi} \left[-\frac{r^{۲}}{۲} - ۲\frac{r^{۳}}{۳}\cos\theta \right]_{۰}^{\sqrt{۵}} d\theta = \int_{۰}^{۲\pi} \left[-\frac{۵}{۲} - \frac{۱۰\sqrt{۵}}{۳}\cos\theta \right] d\theta \\
&= \left[-\frac{۵}{۲}\theta - \frac{۱۰\sqrt{۵}}{۳}\sin\theta \right]_{۰}^{۲\pi} = -۵\pi
\end{aligned}$$

۱۱.۲ امتحان یازدهم

صورت مسایل

۱) در پیوستگی یا عدم پیوستگی تابع زیر در مبداء مختصات بحث کنید:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x+y^۲)^۲+x^۲}{(x+y^۲)^۲-x^۲} & (x+y^۲)^۲\neq x^۲\\ ۰ & (x+y^۲)^۲=x^۲\end{cases}$$

۲) اگر $F\left(\frac{x}{y},\frac{z}{x}\right)=۰$ آنگاه k را طوری بیابید که $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=kz$.

۳) مشتق سویی تابع $f(x,y,z)=xy+yz^۲+xy^۲$ را در نقطهٔ $P_۰(۲,۰,۳)$ و در امتداد بردار یکهٔ $\mathbf{u}=-\frac{۲}{۳}\mathbf{i}-\frac{۱}{۳}\mathbf{j}+\frac{۲}{۳}\mathbf{k}$ بیابید.

۴) معادله خط مماس بر محل تقاطع سطح $۳۶x^۲-۹y^۲+۴z^۲+۳۶=۰$ با صفحه $x=۱$ را در نقطهٔ $P_۰\left(۱,۲\sqrt{۳},-۳\right)$ بیابید.

۵) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال $\int_۰^\pi\left[\int_x^\pi\frac{\sin y}{y}\,dy\right]dx$.

۶) اگر V ناحیه بین دو کره $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ و $x^۲+y^۲+z^۲=۴$ باشد، آنگاه مطلوب است محاسبهٔ انتگرال سه گانهٔ $\iiint_V e^{\left(x^۲+y^۲+z^۲\right)^{۳/۲}}\,dV$.

۷) مساحت سطح جدا شده از مخروط $x^۲=y^۲+z^۲$ به وسیله صفحات مختصات، $x=۱$ و $x=۲$ را بیابید.

۸) اگر $\mathbf{F}=\frac{y^۲}{۲}\mathbf{i}+xy\mathbf{j}-x^۲\mathbf{k}$ و سطح S قسمتی از بیضی‌گون $\frac{x^۲}{۴}+\frac{y^۲}{۱۶}+z^۲=۱$ باشد که $z\geq ۰$، درستی قضیه استوکس را برای میدان برداری $\mathbf{F}$ و سطح S تحقیق کنید.

پاسخ مسایل

پاسخ مسألهٔ ۱) مسیر $\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(\circ, t)}$ در مبداء را امتحان می‌کنیم:

$$\lim_{t \to \circ} f(\mathbf{r}(t)) = \lim_{t \to \circ} \frac{t^{۴} + \circ}{t^{۴} - \circ} = ۱$$

پس حد f در $(\circ, \circ)$ در صورت وجود برابر است با ۱، که چون این مقدار با $f(\circ, \circ) = \circ$ متفاوت است، نتیجه می‌گیریم که تابع در $(\circ, \circ)$ پیوسته نیست.

پاسخ مسألهٔ ۲) با فرض $u = x/y$ و $u = z/x$، داریم

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{۱}{y}\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{z}{x^{۲}}\frac{\partial F}{\partial v} \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{x}{y^{۲}}\frac{\partial F}{\partial u} \\
\frac{\partial F}{\partial z} &= \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{۱}{x}\frac{\partial F}{\partial v}
\end{aligned}$$

اکنون با استفاده از فرمول مشتق ضمنی داریم

$$\begin{aligned}
x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} &= x\frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} + y\frac{-\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \\
&= \frac{-۱}{\frac{۱}{x}\frac{\partial F}{\partial v}}\left\{x\left(\frac{۱}{y}\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{z}{x^{۲}}\frac{\partial F}{\partial v}\right) + y\left(-\frac{x}{y^{۲}}\frac{\partial F}{\partial u}\right)\right\} \\
&= \frac{-۱}{\frac{۱}{x}\frac{\partial F}{\partial v}}\left(-\frac{z}{x}\frac{\partial F}{\partial v}\right) = z
\end{aligned}$$

بنابراین رابطه به ازای $k = ۱$ برقرار است.

پاسخ مسأله ۳) با توجه به این که

$$\begin{aligned}
\nabla f(P_\circ) &= \overrightarrow{\left(y + y^{۲}, x + z^{۲} + ۲xy, ۲yz\right)}|_{P_\circ} = \overrightarrow{(\circ, ۱۱, \circ)} \\
\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} &= \frac{\mathbf{u}}{\sqrt{\left(\frac{-۲}{۳}\right)^{۲} + \left(\frac{-۱}{۳}\right)^{۲} + \left(\frac{۲}{۳}\right)^{۲}}} = \mathbf{u}
\end{aligned}$$

و در نظر گرفتن تعریف، داریم

$$D_u f(P_\circ) = \nabla f(P_\circ) \bullet \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = \circ - \frac{۱۱}{۳} + \circ = -\frac{۱۱}{۳}$$

پاسخ مسأله ۴) هر بردار مماس به فصل مشترک دو سطح، بر هر یک از این سطوح مماس است. بردار قائم هر یک از این سطوح عمود است) پس کافی است بردار قائم بر صفحه $x = ۱$ را در بردار قائم بر سطح $۳۶x^۲ - ۹y^۲ + ۴z^۲ + ۳۶ = ۰$ ضرب خارجی کنیم. یعنی،

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}_۱ &= \nabla f_۱(P_\circ) = \overrightarrow{(۱,\circ,\circ)}|_{P_\circ} = \overrightarrow{(۱,\circ,\circ)},\\
\mathbf{n}_۲ &= \nabla f_۲(P_\circ) = \overrightarrow{(۷۲x,-۱۸y,۸z)}|_{P_\circ} = \overrightarrow{\left(۷۲,-۳۶\sqrt{۳},-۲۴\right)},\\
V &= \mathbf{n}_۱ \times \mathbf{n}_۲ = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ ۱ & \circ & \circ\\ ۷۲ & -۳۶\sqrt{۳} & -۲۴ \end{vmatrix} = \overrightarrow{\left(\circ,۲۴,۳۶\sqrt{۳}\right)}
\end{aligned}$$

بنابراین، خط مورد نظر عبارت است از خط گذشته از نقطهٔ $P_\circ$ با بردار هادی V، یعنی

$$\ell\ :\ \frac{x-۱}{\circ} = \frac{y-۲\sqrt{۳}}{۲۴} = \frac{z+۳}{-۳۶\sqrt{۳}}\ :\ \begin{cases} x = ۱\\ y = \frac{۱۲-۲z}{۳\sqrt{۳}} \end{cases}$$

پاسخ مسأله ۵) انتگرال نامعین تابع $\dfrac{\sin y}{y}$ معلوم نیست. بر همین اساس لازم است که ترتیب حدود آن را عوض کنیم. شاید با این کار مسأله قابل حل شود. (به شکل ۲۰.۲—(الف) توجه شود) در اینجا دامنهٔ انتگرال عبارت است از

$$D = \left\{(x,y)\ \middle|\ \circ \le x \le \pi, x \le y \le \pi\right\}$$

که پس از تعویض ترتیب حدود، عبارت است از

$$D = \left\{(x,y)\ \middle|\ \circ \le y \le \pi, \circ \le x \le y\right\}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
I &= \iint\limits_D \frac{\sin y}{y}dxdy = \int_\circ^\pi \left[\int_\circ^y \frac{\sin y}{y}dx\right] dy\\
&= \int_\circ^\pi \left[\frac{\sin y}{y}x\right]_{x=\circ}^{x=y} dy = \int_\circ^\pi \sin y\, dy = \Big[-\cos y\Big]_\circ^\pi = ۲
\end{aligned}$$

پاسخ مسأله ۶) از تغییر مختصات کروی استفاده می‌کنیم. چون ناحیهٔ انتگرال گیری

$$V\ :\ ۱ \le x^۲ + y^۲ + z^۲ \le ۴$$

می‌باشد، نتیجه می‌گیریم که تصویر کروی V عبارت است از $۲ \leq \rho \leq ۱ : V'$ و چون شرطی بر θ و φ وجود ندارد، نتیجه می‌گیریم که

$$V' \,:\, ۱ \leq \rho \leq ۲\,,\; ۰ \leq \varphi \leq \pi\,,\; ۰ \leq \theta \leq ۲\pi$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{V} e^{\left(x^۲+y^۲+z^۲\right)^{۳/۲}} dxdydz &= \iiint\limits_{V'} e^{\rho^۳} \rho^۲ \sin\varphi \, d\rho d\theta d\varphi \\
&= \int_۰^{۲\pi} \left[\int_۰^{\pi} \left[\int_۱^۲ e^{\rho^۳} \sin\varphi \, d\rho\right] d\varphi\right] d\theta \\
&= \left(\int_۰^{۲\pi} ۱ d\theta\right) \left(\int_۰^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi\right) \left(\int_۱^۲ \rho^۲ e^{\rho^۳} d\rho\right) \\
&= \Big[\theta\Big]_۰^{۲\pi} \Big[-\cos\varphi\Big]_۰^{\pi} \left[\frac{۱}{۳} e^{\rho^۳}\right]_۱^۲ = \frac{۴\pi}{۳} e \left(e^۷ - ۱\right)
\end{aligned}$$

پاسخ مسأله ۷) سطح جدا شده را بر صفحه yOz تصویر می‌کنیم. چون بایستی $۲ \leq x \leq ۱$ پس این تصویر عبارت است از $۴ \leq y^۲ + z^۲ \leq ۱ : D_{yz}$. از طرفی سطح مورد نظر را به صورت $S \,:\, x = \sqrt{y^۲ + z^۲}\,;\, (y,z) \in D_{yz}$ می‌شود نوشت. بنابراین

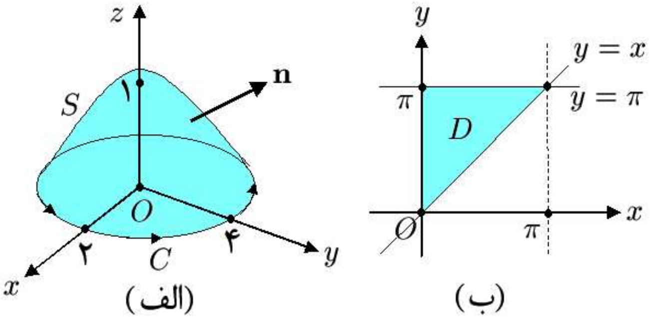
$$\begin{aligned}
d\sigma &= \sqrt{۱ + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^۲ + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^۲} \, dydz \\
&= \sqrt{۱ + \left(\frac{y}{\sqrt{y^۲ + z^۲}}\right)^۲ + \left(\frac{z}{\sqrt{y^۲ + z^۲}}\right)^۲} \, dydz = \sqrt{۲} \, dydz
\end{aligned}$$

و در نتیجه مساحت S عبارت است از

$$\begin{aligned}
\text{Area}(S) &= \iint\limits_{(S)} d\sigma = \iint\limits_{D_{yz}} \sqrt{۲} \, dydz = \sqrt{۲} \iint\limits_{D_{yz}} dydz \\
&= \sqrt{۲} \text{Area}\left(D_{yz}\right) = \sqrt{۲}\left(۴\pi - \pi\right) = ۳\pi\sqrt{۲}
\end{aligned}$$

پاسخ مسأله ۸) در اینجا S عبارت از نیمهٔ بالایی یک بیضی گون به مرکز مبداء و با نیم قطرهای ۲ و ۴ است. در واقع

$$S \,:\, z = \sqrt{۱ - \frac{x^۲}{۴} - \frac{y^۲}{۱۶}}\,;\, (x,y) \in D$$



شکل ۲.۲۰: (الف) مسألهٔ ۵ از امتحان یازدهم (ب) مسألهٔ ۷ از امتحان یازدهم

که در آن $D = D_{xy} \;:\; \frac{x^۲}{۴} + \frac{y^۲}{۱۶} \leq ۱$. بعلاوه مرز S عبارت است از مقطع S با صفحهٔ $z = ۰$، یعنی $C : \frac{x^۲}{۴} + \frac{y^۲}{۱۶} = ۱ \,,\, z = ۰$ که به صورت

$$C \;:\; \mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(۲\cos t, ۴\sin t, ۰)} \;\;;\;\; ۰ \leq t \leq ۲\pi$$

پارامتره می‌شود. زیرا باید جهت C جهت مثبت مثلثاتی باشد (به شکل ۲.۲۰—(ب) توجه شود) بنابراین

$$\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} &= \int_۰^{۲\pi} \mathbf{F}(۲\cos t, ۴\sin t, ۰) \bullet \overrightarrow{(-۲\sin t, ۴\cos t, ۰)}\, dt \\
&= \int_۰^{۲\pi} \overrightarrow{\left(۸\sin^۲ t, ۸\cos t \sin t, -۴\cos^۲ t\right)} \bullet \overrightarrow{(-۲\sin t, ۴\cos t, ۰)}\, dt \\
&= \int_۰^{۲\pi} \left(۱۶\sin^۳ t + ۳۲\cos^۲ t \sin t\right)\, dt \\
&= ۱۶\int_۰^{۲\pi} \left(-\left(۱ - \cos^۲ t\right) + ۲\cos^۲ t\right) \sin t\, dt \\
&= ۱۶\int_۰^{۲\pi} \left(۳\cos^۲ t - ۱\right) \sin t\, dt = ۱۶\left[\cos t - \cos^۳ t\right]_۰^{۲\pi} = ۰
\end{aligned}$$

برای محاسبهٔ این مقدار توسط قضیهٔ استوکس، لازم است کرل $\mathbf{F}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\mathrm{Curl}\,(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^۲/۲ & xy & -x^۲ \end{vmatrix} = \overrightarrow{(۰, ۲x, ۰)}$$

به علاوه چون معادلهٔ معرف سطح عبارت از $f = x^{۲}/۴ + y^{۲}/۱۶ + z^{۲} - ۱$ است، داریم

$$\mathbf{n} = \pm\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \pm\frac{\overrightarrow{(x/۲, y/۸, ۲z)}}{\sqrt{x^{۲}/۴ + y^{۲}/۶۴ + ۴z^{۲}}}$$

که با توجه به شکل ۲.۲۰—(ب) حالت مثبت مورد قبول است، به علاوه

$$d\sigma = \frac{\|\nabla f\|}{|\frac{\partial f}{\partial z}|}dxdy = \frac{\sqrt{x^{۲}/۴ + y^{۲}/۶۴ + ۴z^{۲}}}{|۲z|}dxdy$$

در نتیجه

$$\iint_{(S)} \mathrm{Curl}\,(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}\, d\sigma = \iint_D \overrightarrow{(۰, ۲x, ۰)} \bullet \overrightarrow{\left(\frac{x}{۲}, \frac{y}{۸}, ۲z\right)}\frac{dxdy}{۲z}$$

$$= \iint_D \frac{xy}{۸z}dxdy = \frac{۱}{۸}\iint_D \frac{xy\, dxdy}{\sqrt{۱ - x^{۲}/۴ - y^{۲}/۱۶}}$$

اما این انتگرال صفر است زیرا با تعویض x به $-x$ تابع تغییر علامت می‌دهد، ولی D تغییری نمی‌کند.

۱۲.۲ امتحان دوازدهم

صورت مسایل

۱) معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که بر صفحه $x + y - ۲z = ۱$ عمود بوده و از محل تقاطع دو صفحه $x - z = ۱$ و $y + ۲z = ۳$ بگذرد.

۲) صفحه مماس بر بیضی‌گون $x^{۲}۲y^{+}z^{۲} = ۱$ را طوری بیابید که موازی $x - y + ۲z = ۰$ باشد.

۳) در پیوستگی و یا عدم پیوستگی تابع زیر در مبداء مختصات بحث کنید:

$$f\,(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xy^{۲}z}{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}} & (x, y, z) \neq (۰, ۰, ۰) \\ ۰ & (x, y, z) = (۰, ۰, ۰) \end{cases}$$

۴) تابع پتانسیل میدان برداری $\mathbf{F}(x,y) = \dfrac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}}$ را در صورت وجود بیابید و کار انجام شده توسط این نیرو را در طول خط $x = y = z$ از نقطهٔ $(۱,۱,۱)$ تا نقطهٔ $(۲,۲,۲)$ بیابید.

۵) هرگاه $\mathbf{F} = \frac{y^۲}{۲}\mathbf{i} + xy\mathbf{j} - z^۲\mathbf{k}$ و S سطح $x^۲+y^۲+z^۲ = ۴$ با فرض $z \geq ۰$ باشد، آنگاه درستی قضیه استوکس را برای $\mathbf{F}$ و S تحقیق کنید.

۶) درستی یا عدم درستی قضیه گرین را برای میدان برداری

$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{-y}{x^۲+y^۲}\mathbf{i} + \frac{x}{x^۲+y^۲}\mathbf{k}$$

بر ناحیه D محصور بین دو دایره $x^۲+y^۲=۱$ و $x^۲+y^۲=۴$ تحقیق کنید.

۷) انتگرال دوگانهٔ $\displaystyle\int_۰^۱ \left[\int_۰^۱ |x-y|\, dy\right] dx$ را حساب کنید.

۸) درستی قضیه دیورژانس را برای سطح $x^۲+y^۲+z^۲=a^۲$ و $\mathbf{F} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ تحقیق کنید، که در آن a عددی حقیقی و مثبت است.

۹) مختصات مرکز ثقل نیمکره همگن $V : x^۲+y^۲+z^۲ = R^۲,\ z \geq ۰$ را با فرض $\delta = ۱$ و $R > ۰$ محاسبه کنید.

پاسخ مسایل

پاسخ مسألهٔ ۱) معادله دسته صفحاتی که از خط محل اشتراک دو صفحه $x - z = ۱$ و $y + ۲z = ۳$ می‌گذرند، به صورت $P_a : a(y+۲z-۳) + (x-z-۱) = ۰$ است. پس صفحه P_a دارای بردار قائم $\mathbf{n}_a = \overrightarrow{(۱, a, ۲a-۱)}$ است. این صفحه بر صفحه مفروض $P : x+y-۲z = ۱$ وقتی و تنها وقتی عمود است که بردار قائم آن بر بردار قائم این صفحه $\mathbf{n} = \overrightarrow{(۱,۱,-۲)}$ عمود باشد، یعنی $\mathbf{n}_a \cdot \mathbf{n} = ۰$. بنابراین $۱ + a - ۲(۲a-۱) = ۰$، یا $a = ۱$. پس صفحه مورد نظر ما $P_۱$ است، یعنی $x+y+z = ۴$.

پاسخ مسألهٔ ۲) فرض کنیم $X_۰ = (a,b,c)$ نقطهٔ دلخواهی از بیضی‌گون مفروض $S : x^۲+۲y^۲+z^۲-۱ = ۰$ باشد. بنابراین $a^۲+۲b^۲+c^۲ = ۱$. اما گرادیان

تابع معرف این بیضی‌گون در نقطهٔ $X_\circ$، به بیضی‌گون عمود است. بنابراین بردار قائم بر صفحهٔ مورد نظر ما نیز می‌باشد:

$$\mathbf{n} = \nabla\left(x^۲ + ۲y^۲ + z^۲ - ۱\right)|_{X_\circ} = \overrightarrow{(۲x, ۴y, ۲z)}|_{X_\circ} = \overrightarrow{(۲a, ۴b, ۲c)}$$

ولی، شرط موازی بودن دو صفحه این است که بردارهای قائم بر آن دو صفحهٔ مفروض موازی باشند. بنابراین، چون بردار قائم بر صفحهٔ P برابر $(۱, -۱, ۲)$ است، نتیجه می‌گیریم که $\frac{۲a}{۱} = \frac{۴b}{-۱} = \frac{۲c}{۲}$، یا $a = -۲b$ و $c = -۴b$. بنابراین، با قرار دادن این روابط در شرط $a^۲ + ۲b^۲ + c^۲ = ۱$ بدست می‌آوریم $۴b^۲ + ۲b^۲ + ۱۶b^۲ = ۱$. پس $۲۲b^۲ = ۱$ یا $b = \pm ۱/\sqrt{۲۲}$. یعنی دو حالت برای $X_\circ$ وجود دارد:

$$X_۱ = \left(\frac{-۲}{\sqrt{۲۲}}, \frac{۱}{\sqrt{۲۲}}, \frac{-۸}{\sqrt{۲۲}}\right) \quad , \quad X_۲ = \left(\frac{۲}{\sqrt{۲۲}}, \frac{-۱}{\sqrt{۲۲}}, \frac{۴}{\sqrt{۲۲}}\right).$$

صفحهٔ گذشته از نقطهٔ $X_۱$ باید دارای بردار قائم $\overrightarrow{\left(\frac{-۴}{\sqrt{۲۲}}, \frac{۴}{\sqrt{۲۲}}, \frac{-۸}{\sqrt{۲۲}}\right)}$ باشد، پس معادله صفحهٔ مطلوب، در این حالت عبارت از $-x + y - ۲z = \frac{\sqrt{۲۲}}{۲}$ است. به صورت مشابه، صفحهٔ گذشته از نقطه $X_۲$ باید دارای بردار قائم $\overrightarrow{\left(\frac{۴}{\sqrt{۲۲}}, \frac{-۴}{\sqrt{۲۲}}, \frac{۸}{\sqrt{۲۲}}\right)}$ باشد، پس معادله صفحهٔ مطلوب، در این حالت عبارت از $x - y + ۲z = \frac{\sqrt{۲۲}}{۲}$ است.

پاسخ مسألهٔ ۳) ثابت می‌کنیم که f در مبداء $O = (\circ, \circ, \circ)$ پیوسته است. برای این منظور باید ثابت کنیم

$$\forall\epsilon\,\exists\delta\,\forall(x, y, z)\ \left(\circ < \sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲} < \delta \Longrightarrow \left|\frac{xy^۲z}{x^۲ + y^۲ + z^۲}\right| < \epsilon\right).$$

اگر فرض شود $u = \max\{|x|, |y|, |z|\}$، آنگاه از فرض $\sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲} < \delta$ نتیجه می‌گردد که $|x| < \delta$، $|y| < \delta$ و $|z| < \delta$. بنابراین $u < \delta$. در این صورت

$$\left|\frac{xy^۲z}{x^۲ + y^۲ + z^۲}\right| = \frac{|x|y^۲|z|}{x^۲ + y^۲ + z^۲} < \frac{uu^۲u}{u^۲ + \circ^۲ + \circ^۲} = u^۲ < \delta^۲$$

پس کافی است فرض شود که $\delta = \sqrt{\epsilon}$. در عبارت بالا، بجای مخرج که $x^۲ + y^۲ + z^۲$ است، عبارت $u^۲ + \circ^۲ + \circ^۲$ را قرار داده‌ایم که همواره از قبلی کوچکتر است، زیرا در میان $|x|$، $|y|$ و $|z|$ لااقل یکی برابر با u است و سایرین کوچکتر و یا مساوی با u هستند.

پاسخ مسألهٔ ۴) بسادگی دیده می‌شود که میدان برداری داده شده دارای دامنه تعریف $\mathbb{R}^۳ - (\circ, \circ, \circ)$ است و بر این دامنه دارای مشتق پیوسته است. بعلاوه

$$P = \frac{x}{\sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}} \quad , \quad Q = \frac{y}{\sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}} \quad , \quad R = \frac{z}{\sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{-yx}{\left(\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}\right)^{۳}}=\frac{\partial Q}{\partial x}\,,\\ \frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{-xz}{\left(\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}\right)^{۳}}=\frac{\partial R}{\partial x}\,,\\ \frac{\partial Q}{\partial z} &= \frac{-yz}{\left(\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}\right)^{۳}}=\frac{\partial Q}{\partial y}\end{aligned}$$

پس $\mathbf{F}$ بر هر مجموعهٔ بسته همبند ساده که $\mathbf{F}$ بر آن بطور پیوسته مشتق‌پذیر باشد، ابقایی است. یعنی، بر هر مجموعهٔ بسته که شامل $(۰,۰,۰)$ نباشد، ابقایی است. فرض کنیم $\omega = f\left(x,y,z\right)$ تابع پتانسیل $\mathbf{F}$ باشد. بنابراین

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{x}{\left(\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}\right)}, & (۱)\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{y}{\left(\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}\right)}, & (۲)\\ \dfrac{\partial f}{\partial z}=\dfrac{z}{\left(\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}\right)}. & (۳)\end{cases}$$

از (۱) نسبت به x انتگرال جزئی گرفته، نتیجه می‌گیریم که

$$f\left(x,y,z\right)=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}+g\left(y,z\right). \qquad (۴)$$

که در اینجا g تابعی از y و z است. اکنون از (۴) نسبت به y و x مشتق گرفته و نتیجه می‌گیریم

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}}=\dfrac{\partial g}{\partial y}, & (۵)\\ \dfrac{\partial f}{\partial z}=\dfrac{z}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}}=\dfrac{\partial g}{\partial z}, & (٦)\end{cases}$$

با مقایسه (۲) و (۵) نتیجه می‌گیریم $\partial g/\partial y = ۰$ و همچنین با مقایسه (۳) و (٦) نتیجه می‌گیریم $\partial g/\partial z = ۰$. بنابراین g تابعی ثابت است. در نتیجه، تابع پتانسیل $\mathbf{F}$ برابر است با $f\left(x,y,z\right)=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}+C$، که C عددی ثابت است.

اما، نقاط داده شدهٔ $(۱,۱,۱)$ و $(۲,۲,۲)$ را در کرهٔ توپر به شعاع یک و با مرکز در $\left(\frac{۳}{۲},\frac{۳}{۲},\frac{۳}{۲}\right)$، که مجموعه‌ای بسته و فاقد $(۰,۰,۰)$ است، می‌توان جای داد. پس از

خاصیت ابقائی بودن $\mathbf{F}$ بر آن می‌توان استفاده کرد

$$\begin{aligned}\int_{(1,1,1)}^{(2,2,2)} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} &= f(2,2,2) - f(1,1,1) \\ &= \left(\sqrt{4+4+4}+C\right) - \left(\sqrt{1+1+1}+C\right) = \sqrt{3}\end{aligned}$$

پاسخ مسألهٔ ۵) از مفروضات $z \geq 0$ و $x^2+y^2+z^2=4$ نتیجه می‌گردد که

$$S \,:\, z = \sqrt{4-x^2-y^2}\,;\,,(x,y)\in D$$

که D تصویر S بر صفحه xOyس است. یعنی، $D \,:\, x^2+y^2 \leq 4$. بعلاوه معادله معرف S عبارت از $h(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-4$ است. همچنین مرز S عبارت است از مقطع S با صفحه xOy:

$$C \,:\, x^2+y^2+z^2=4,\ z=0 \,:\, x^2+y^2=4\,,\, z=0$$

اگر فرض کنیم جهت بردار قائم بر S به سمت بالا است (مولفه z آن مثبت است) پس باید بر C به جهت مثبت مثلثاتی حرکت کرد (به شکل ۲۱.۲—(الف) توجه شود). بنابراین C را به شکل زیر پارامتره می‌کنیم:

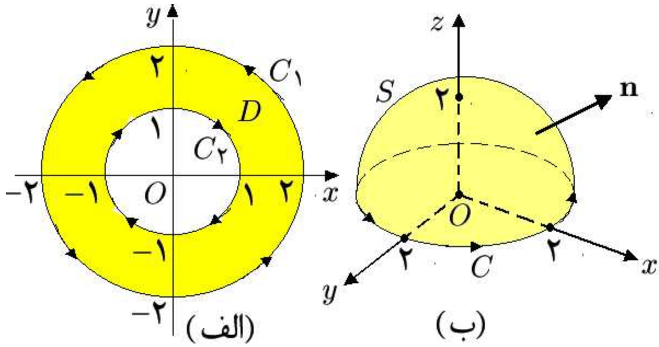
$$C \,:\, \mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(2\cos t, 2\sin t, 0)} \;;\; 0 \leq t \leq 2\pi$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(2\cos t, 2\sin t, 0) \bullet \overrightarrow{(-2\sin t, 2\cos t, 0)}\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \overrightarrow{\left(2\sin^2 t, 4\sin t\cos t, 0\right)} \bullet \overrightarrow{(-2\sin t, 2\cos t, 0)}\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-4\sin^3 t + 8\sin t\cos^2 t\right)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(4 - 12\cos^2 t\right)(-\sin t)\,dt \\ &= \left[-4\cos^3 t + 4\cos t\right]_0^{2\pi} = 0\end{aligned}$$

اکنون برای تحقیق قضیه استوکس، لازم است $\mathrm{Curl}(\mathbf{F})$ را محاسبه کنیم:

$$\mathrm{Curl}(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y^2/2 & xy & -z^2 \end{vmatrix} = \overrightarrow{(0,0,0)}$$



شکل ۲۱.۲: (الف) مسألۂ ۵ از امتحان دوازدهم (ب) مسألۂ ٦ از امتحان دوازدهم

بنابراین $\iint_{(S)} \operatorname{Curl}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}\, d\sigma = ۰$، و قضیه در این حالت تحقیق شد.

پاسخ مسألۂ ٦) ناحیه D شامل مبداء نیست، و چون $\mathbf{F}$ بر دامنه‌اش به طور پیوسته مشتق‌پذیر است و $D = \mathbb{R}^۲ - (۰, ۰)$، پس در این مورد از قضیه گرین می‌توان استفاده کرد (به شکل ۲۱.۲—(ب) توجه شود).

ابتدا $C_۱$ را پارامتره می‌کنیم. با توجه به اینکه $C_۱ : \ x^۲ + y^۲ = ۴$ و جهت $C_۱$ موافق جهت مثلثاتی است، نتیجه می‌گیریم

$$C_۱ \ : \mathbf{r} = \overrightarrow{(۲\cos t, ۲\sin t)} \ ; \ \ ۰ \leq t \leq ۲\pi$$

همچنین، با توجه به اینکه $C_۲ : \ x^۲ + y٦۲ = ۱$ و جهت $C_۲$ مخالف جهت مثلثاتی است، نتیجه می‌گیریم

$$C_۲ \ : \mathbf{r} = \overrightarrow{(\sin t, \cos t)} \ ; \ \ ۰ \leq t \leq ۲\pi$$

بنابراین،

$$\begin{aligned}
\oint_{C_۱} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} &= \int_۰^{۲\pi} \mathbf{F}\,(۲\cos t, ۲\sin t) \bullet \overrightarrow{(-۲\sin t, ۲\cos t)}\, dt \\
&= \int_۰^{۲\pi} \overrightarrow{\left(\frac{-۲\sin t}{۴\sin^۲ t + ۴\cos^۲ t}, \frac{۲\cos t}{۴\sin^۲ t + ۴\cos^۲ t}\right)} \bullet \overrightarrow{(-۲\sin t, ۲\cos t)}\, dt \\
&= \int_۰^{۲\pi} \left(\cos^۲ t + \sin^۲ t\right)\, dt
\end{aligned}$$

$$\oint_{C_۲} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_۰^{۲\pi} \mathbf{F}\,(\sin t, \cos t) \bullet \overrightarrow{(\cos t, -\sin t)}\, dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\circ}^{۲\pi} \overrightarrow{\left(\frac{-\cos t}{\sin^{۲} t + ۴\cos^{۲} t}, \frac{\sin t}{\sin^{۲} t+\cos^{۲} t}\right)} \bullet \overrightarrow{(\cos t, -\sin t)}\, dt \\
&= \int_{\circ}^{۲\pi} -\left(\cos^{۲} t + \sin^{۲} t\right)\, dt = -۲\pi
\end{aligned}
$$

در نتیجه، اگر C مرز D باشد، با توجه به اینکه $C = C_۱ + C_۲$، داریم

$$\oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \oint_{C_۱} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} + \oint_{C_۲} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \circ$$

اما، بالستفاده از قضیه گرین، داریم

$$
\begin{aligned}
&\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \\
&= \iint_D \left\{ \frac{\left(x^{۲}+y^{۲}\right) - (۲x)(x)}{\left(x^{۲}+y^{۲}\right)^{۲}} - \frac{-\left(x^{۲}+y^{۲}\right) - (۲y)(-y)}{\left(x^{۲}+y^{۲}\right)^{۲}} \right\} dxdy \\
&= \iint_D \left\{ \frac{y^{۲}-x^{۲}}{\left(x^{۲}+y^{۲}\right)} - \frac{y^{۲}-x^{۲}}{\left(x^{۲}+y^{۲}\right)^{۲}} \right\} dxdy = \circ
\end{aligned}
$$

پاسخ مسألهٔ ۷) دامنه انتگرال $D\ :\ \circ \le x \le ۱\,,\ \circ \le y \le ۱$ است. اما تابع مورد انتگرال $|x-y|$ بر نیمی از آن برابر $x-y$ و بر نیمی دیگر برابر $y-x$ است. به بیان دقیقتر، اگر

$$
\begin{aligned}
D_۱ &= \left\{(x,y)\ \middle|\ \circ \le x \le ۱\,,\ \circ \le y \le x\right\}, \\
D_۲ &= \left\{(x,y)\ \middle|\ \circ \le x \le ۱\,,\ x \le y \le ۱\right\},
\end{aligned}
$$

آنگاه $|x-y|$ بر $D_۱$ برابر با $x-y$ وبر $D_۲$ برابر با $y-x$ است. (به شکل ۲۲.۲—(الف) توجه شود). بنابراین

$$
\begin{aligned}
\iint_D |x-y|\, dxdy &= \iint_{D_۱} (x-y)\ dxdy + \iint_{D_۲} (y-x)\ dxdy \\
&= \int_{\circ}^{۱} \left[\int_{\circ}^{x} (x-y)\ dy\right] dx + \int_{\circ}^{۱} \left[\int^{۱} -x\ (y-x)\right] dx \\
&= \int_{\circ}^{۱} \left[-\frac{y^{۲}}{۲} + xy\right]_{\circ}^{x} dx + \int_{\circ}^{۱} \left[\frac{y^{۲}}{۲} - xy\right]_{x}^{۱} = \frac{۱}{۳}
\end{aligned}
$$

پاسخ مسأله۸) رویه $S\ :\ x^2+y^2+z^2=a^2$ را به دو بخش تقسیم می‌کنیم:

$$S_1\ :\ z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\ ;\ (x,y)\in D$$
$$S_2\ :\ z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}\ ;\ (x,y)\in D$$

که در اینجا $D\ :\ x^2+y^2\leq a^2$. معادله معرف هر دو رویه

$$h\left(x,y,z\right)=x^2+y^2+z^2-a^2$$

است. بنابراین چون $\nabla h=\left(2x,2y,2z\right)$، داریم

$$\begin{aligned}
d\sigma_1 &= d\sigma_2=\frac{\|\nabla h\|}{\left|\frac{\partial h}{\partial z}\right|}\,dxdy=\frac{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}{|2z|}\,dxdy=\frac{a\,dxdy}{|z|}\\
\mathbf{n}_1 &= \pm\frac{\nabla h}{\|\nabla h\|}=\pm\frac{\overrightarrow{\left(2x,2y,2z\right)}}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}=\pm\overrightarrow{\left(\frac{x}{a},\frac{y}{a},\frac{z}{a}\right)}\\
\mathbf{n}_2 &= \pm\frac{\nabla h}{\|\nabla h\|}=\pm\frac{\overrightarrow{\left(2x,2y,2z\right)}}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}=\pm\overrightarrow{\left(\frac{x}{a},\frac{y}{a},\frac{z}{a}\right)}
\end{aligned}$$

که چون (مطابق فرض معمول) باید بردارهای قائم بر یک سطح بسته روی به خارج داشته باشند، از شکل ۲۲.۲—(ب) اینطور بر می‌آید که بایستی $\mathbf{n}_1$ رو به بالا $\mathbf{n}_2$ رو به پائین داشته باشد. بنابراین، با توجه به اینکه z در S_1 مثبت و در S_2 منفی است، در هر دو حالت $+$ مورد قبول است. یعنی

$$\mathbf{n}_1=\overrightarrow{\left(\frac{x}{a},\frac{y}{a},\frac{z}{a}\right)}\quad,\quad\mathbf{n}_1=\overrightarrow{\left(\frac{x}{a},\frac{y}{a},\frac{z}{a}\right)}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{(S_1)}\mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma=\iint\limits_{D}\mathbf{F}\left(x,y,z\right)\bullet\overrightarrow{(x,y,z)}\frac{dxdy}{|z|}\\
&= \iint\limits_{D}\overrightarrow{(x,y,z)}\bullet\overrightarrow{(x,y,z)}\frac{dxdy}{|z|}=\iint\limits_{D}\left(x^2+y^2+z^2\right)\frac{dxdy}{|z|}\\
&= \iint\limits_{D}a^2\frac{dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=a^2\int_0^{2\pi}\left[\int_0^a\frac{r\,dr}{\sqrt{a^2r^2}}\right]d\theta\\
&= a^2\int_0^{2\pi}\left[-\sqrt{a^2-r^2}\right]_{r=0}^{r=a}d\theta=a^2\int_0^{2\pi}a\,d\theta=2\pi a^3
\end{aligned}$$

با محاسباتی که عین محاسبات بالا است، نشان داده می‌شود که $\iint_{(S_۲)} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, d\sigma$ نیز برابر با $۲\pi a^۳$ است.بنابراین

$$\iint\limits_{(S)} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, d\sigma = \iint\limits_{(S_۱)} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, d\sigma + \iint\limits_{(S_۱)} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, d\sigma = ۴\pi a^۳$$

برای تحقیق قضیه دیورژانس، ابتدا $\operatorname{div}(\mathbf{F})$ را محاسبه می‌کنیم

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = ۳$$

در نتیجه، اگر V داخل S باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} \iiint\limits_{V} \operatorname{div}(\mathbf{F})\; dxdydz &= \iiint\limits_{V} ۳\, dxdydz \\ &= ۳\operatorname{Vol}(V) = ۳ \times \frac{۴}{۳}\pi a^۳ = ۴\pi a^۳ \end{aligned}$$

پاسخ مسألهٔ ۹) فرض کنیم مجموعه مود نظر V باشد. V نیم کره شمالی از یک کره به مرکز در مبداء و به شعاع R است. پس نمایش کروی آن عبارت است از

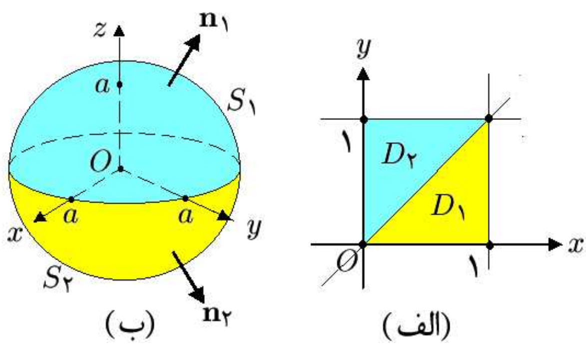
$$V\ :\ ۰ \leq \rho \leq R\,,\ ۰ \leq \theta \leq ۲\pi\,,\ ۰ \leq \varphi \leq \frac{\pi}{۲}$$

در این صورت، جرم V برابر است با

$$\iiint\limits_{V} \delta\, dxdydz = \iiint\limits_{V} dxdydz = \operatorname{Vol}(V) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۴}{۳}\pi R^۳ = \frac{۲}{۳}\pi R^۳$$

چون با تعویض x با $-x$، چگالی δ و حجم V تغییر نمی‌کنند، بنابراین گشتاور V حول صفحه $x = ۰$ صفر است. در نتیجه مرکز ثقل V بر این صفحه واقع است، یعنی $x_C = ۰$. به دلیل مشابه $y_C = ۰$. پس برای مشخص شدن مرکز ثقل C، کافی است z_C را محاسبه کنیم. نتیجه $C = \left(۰, ۰, \frac{۳}{۸}R\right)$ است، زیرا

$$\begin{aligned} z_C &= \frac{۱}{m} \iiint\limits_{V} z\, dxdydz = \frac{۳}{۲\pi R^۳} \iiint\limits_{V} z\, dxdydz \\ &= \frac{۳}{۲\pi R^۳} \iiint\limits_{V'} \rho \cos\varphi \rho^۲\, d\rho d\varphi d\theta \end{aligned}$$



شکل ۲۲.۲: (الف) مسألهٔ ۷ از امتحان دوازدهم (ب) مسألهٔ ۸ از امتحان دوازدهم

$$= \frac{3}{2\pi R^3}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi/2}\left[\int_0^R \rho^3 \sin\varphi\cos\varphi\, d\rho\right] d\varphi\right] d\theta$$

$$= \frac{3}{2\pi R^3}\left[\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_0^{\pi/2}\Big[\theta\Big]_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^R = \frac{3}{8}R$$

۱۳.۲ امتحان سیزدهم

صورت مسایل

۱) فرض کنید R ناحیهٔ مثلثی شکل با رئوس $(0,0)$ ، $(1,0)$ و $(0,1)$ باشد. انتگرال $\iint_R \exp\left(\frac{y-x}{y+x}\right) dxdy$ را محاسبه کنید.

۲) انتگرال $\int_C xy\,dx + yz\,dy + zx\,dz$ را محاسبه کنید. C آن قسمت از فصل مشترک $x^2+y^2+z^2 = 4x$ و $z = x$ در طرفی از صفحهٔ xOz واقع است که $y > 0$.

۳) درستی قضیهٔ دیورژانس (یا واگرایی) برای میدان برداری نیروی $\mathbf{F} = (x+y)\,\mathbf{i} + (y+z)\,\mathbf{j} + (x+z)\,\mathbf{k}$ و سطح خارجی حجم محدود به $x^2 +$

$y^{۲} - ۴ \le z \le ۴ - x^{۲} - y^{۲}$ را بررسی کنید.

۴) مطلوبست محاسبهٔ انتگرال $I = \oint_C x^{۲}y^{۳}\,dx + dy + z\,dz$ با استفاده از قضیهٔ استوکس، که در آن C دایرهٔ حاصل از برخورد استوانهٔ $x^{۲} + y^{۲} = a^{۲}$ و صفحهٔ $z = ۲$ است ($\mathbf{n}$ را در جهت z های منفی در نظر بگیرید).

۵) گشتاور ماند (ممان اینرسی) جسمی که از بالا به کرهٔ $x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = ۴$ و از پائین به مخروط $۳z^{۲} = x^{۲} + y^{۲}$ محدود می‌باشد را نسبت به مبداء بیابید، مشروط به اینکه تابع چگالی $\delta = \exp\left((x^{۲} + y^{۲} + z^{۲})^{۵/۲}\right)$ باشد.

٦) فقط به یکی از دو قسمت زیر پاسخ دهید:

الف) فرض کنید C شامل قوس نیم دایرهٔ بالایی دایرهٔ واحد از صفحهٔ xOy به همراه بازهٔ $[-۱; ۱]$ از محور x باشد. در این صورت، درستی قضیهٔ گرین را برای انتگرال $\oint_C \exp(x^{۲})\,dx + x\,dy$ تحقیق کنید.

ب) مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ ماتریس ذیل را تعیین کرده و آنرا قطری کنید:

$$A = \begin{bmatrix} ۱۳ & ۰ & -۱۵ \\ -۳ & ۴ & ۹ \\ ۵ & ۰ & -۷ \end{bmatrix}$$

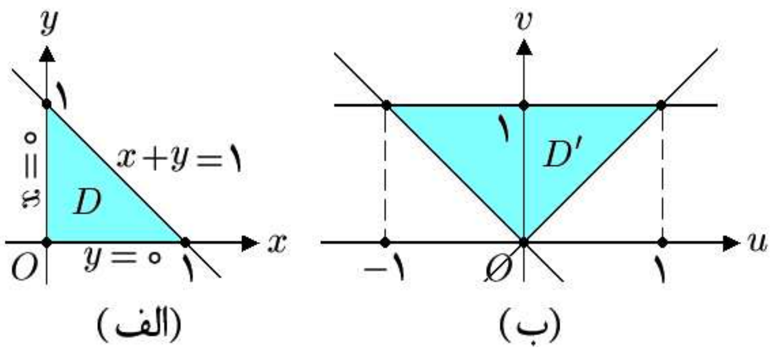
پاسخ مسایل

پاسخ مسألهٔ ۱) ناحیهٔ داده شده یک مثلث در صفحهٔ Oxy است. به شکل ۲۳.۲-(الف) توجه شود. برای حل مسأله از تغییر متغیر خطی $u = y - x$ و $v = y + x$ استفاده می‌کنیم. بنابراین، داریم

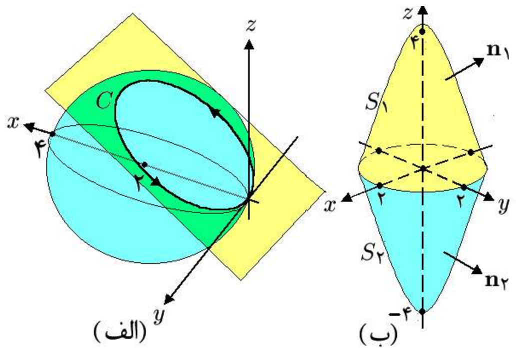
$$\begin{cases} x = (-u + v)/۲ \\ y = (u + v)/۲ \end{cases} \quad , \quad J = \left\| \begin{matrix} -۱/۲ & +۱/۲ \\ ۱/۲ & ۱/۲ \end{matrix} \right\| = \left| \frac{-۱}{۲} \right| = \frac{۱}{۲}$$

چون تغییر متغیر خطی، خط را به خط تصویر می‌کند، برای یافتن تصویر ناحیهٔ انتگرال گیری D در صفحهٔ Ouv، اضلاع مثلث سازندهٔ لبهٔ D را تصویر می‌کنیم:

xOy	uOv
$x = ۰$	$u = v$
$y = ۰$	$v = -u$
$x + y - ۱$	$v = ۱$



شکل ۲۳.۲: پاسخ مسألهٔ ۱ از امتحان سیزدهم



شکل ۲۴.۲: (الف) مسألهٔ ۲ از امتحان سیزدهم (ب) مسألهٔ ۳ از امتحان سیزدهم

به شکل ۲۳.۲—(ب) توجه شود. به این ترتیب، داریم

$$\iint_D e^{(y-x)/(y+x)}\,dxdy = \iint_{D'} e^{u/v}\frac{1}{2}\,dudv = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\int_{-v}^{v} e^{u/v}du\right]\,dv$$

$$= \quad \frac{1}{2}\int_0^1 \left[ve^{u/v}\right]_{u=-v}^{u=v} dv = \frac{1}{2}\int_0^1 v\left(e-e^{-1}\right)\,dv = \frac{1}{2}\sinh 1$$

پاسخ مسألهٔ ۲) منحنی داده شده C فصل مشترک یک کره و یک صفحه است. این منحنی دایره‌ای است که در شکل ۲۴.۲—(الف) نشان داده شده است. برای پارامتره نمودن C ابتدا آن را بر صفحهٔ Oxy تصویر می‌کنیم:

$$\left\{\begin{array}{l} z=x \\ x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۴x \end{array}\right. \Rightarrow ۲x^{۲}+y^{۲}=۴x \Rightarrow ۲(x-۱)^{۲}+y^{۲}=۲$$

که یک بیضی می‌باشد. آن را به صورت مثلثاتی پارامتره می‌کنیم. برای این منظور کافی است فرض شود $x-۱=\cos t$ و $y=\sqrt{۲}\sin t$. از طرفی $z=x$، بنابراین، در مجموع داریم

$$C\ :\ \vec{r}(t)=\overrightarrow{\left(۱+\cos t, \sqrt{۲}\sin t, ۱+\cos t\right)}$$

برای تعیین حدود تغییرات t توجه می‌کنیم که مطابق فرض باید $y\ \leq\ ۰$ بنابراین $\sin t \leq ۰$ یا $۰ \leq t \leq \pi$. اکنون، انتگرال خواسته شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \\
&= \int_{۰}^{\pi} \mathbf{F}\left(۱+\cos t, \sqrt{۲}\sin t, ۱+\cos t\right) \bullet \overrightarrow{\left(-\sin t, \sqrt{۲}\cos t, -\sin t\right)}\, dt \\
&= \int_{۰}^{\pi} \sin t\,(۱+\cos t)\left(\cos t-۱-\sqrt{۲}\sin t\right)\, dt \\
&= \left[\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin t\cos t-\frac{\sqrt{۲}}{۲}t-\frac{\sqrt{۲}}{۳}\sin^{۳} t-\frac{۱}{۳}\cos^{۳} t+\frac{۱}{۳}+\cos t\right]_{۰}^{\pi} \\
&= -\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\pi+\frac{۴}{۳}\right)
\end{aligned}$$

پاسخ مسألهٔ ۳) این رویه، قسمتی از فضا است که از بالا به سهمیگون $z=۴-x^{۲}-y^{۲}$ و از پائین به سهمیگون $z=x^{۲}+y^{۲}-۴$ محدود می‌گردد. به شکل ۲۴.۲—(ب) توجه شود. این رویه از دو بخش تشکیل می‌گردد $S=S_{۱}+S_{۲}$، که در آن

$$\begin{aligned}
S_{۱}\ &:\ z=۴-x^{۲}-y^{۲}\ ;\ (x,y)\in D\ :\ x^{۲}+y^{۲}\leq ۴ \\
S_{۲}\ &:\ z=x^{۲}+y^{۲}-۴\ ;\ (x,y)\in D\ :\ x^{۲}+y^{۲}\leq ۴
\end{aligned}$$

چنانچه فرض کنیم $f_{۱}=۴-x^{۲}-y^{۲}$، آنگاه بردار نرمال بر $S_{۱}$ عبارت است از

$$\mathbf{n}_{۱}=\pm\frac{f_{۱}'}{\|f_{۱}'\|}=\pm\frac{\overrightarrow{(۲x, ۲y, ۱)}}{\sqrt{۴x^{۲}+۴y^{۲}+۱}}$$

که با توجه به فرض مسأله، حالت + مورد قبول است.
چنانچه فرض کنیم $f_۲ = x^۲ + y^۲ - ۴$، آنگاه بردار نرمال بر $S_۲$ عبارت است از

$$\mathbf{n}_۲ = \pm \frac{f'_۲}{\|f'_۲\|} = \pm \frac{\overrightarrow{(۲x, ۲y, -۱)}}{\sqrt{۴x^۲ + ۴y^۲ + ۱}}$$

که با توجه به فرض مسأله، حالت + مورد قبول است. بعلاوه، المان مساحت این دو رویه برابرند با

$$\begin{aligned} d\sigma_۱ &= d\sigma_۲ = \frac{\|f'_۱\|}{|\partial f_۱ / \partial z|} dxdy \\ &= \frac{\sqrt{۴x^۲ + ۴y^۲ + ۱}}{|۱|} dxdy = \sqrt{۴x^۲ + ۴y^۲ + ۱}\, dxdy \end{aligned}$$

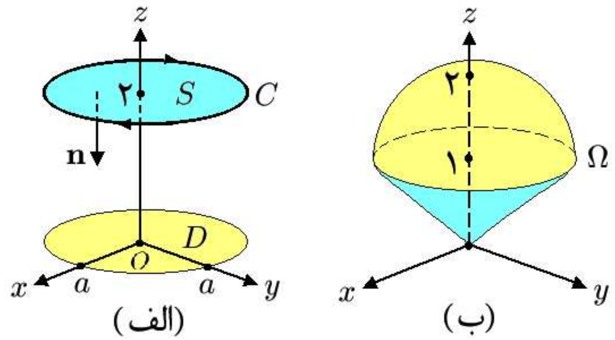
بنابراین، داریم

$$\begin{aligned} &\oiint_{(S)} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n} d\sigma = \iint_{(S_۱)} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n} d\sigma + \iint_{(S_۲)} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n} d\sigma \\ &= \iint_D \overrightarrow{\left(x+y, y+۴-x^۲-y^۲, x+۴-x^۲-y^۲\right)} \bullet \overrightarrow{(۲x, ۲y, ۱)} dxdy \\ &\quad + \iint_D \overrightarrow{\left(x+y, y+x^۲+y^۲-۴, x+x^۲+y^۲-۴\right)} \bullet \overrightarrow{(۲x, ۲y, -۱)}\, dxdy \\ &= \iint_D \left\{ ۴x\,(x+y) + ۴y^۲ + ۸ - ۲x^۲ - ۲y^۲ \right\} dxdy \\ &= \iint_D \left(۲x^۲ + ۲y^۲ + ۸ \right) dxdy = \iint_{D'} \left(۲r^۲ + ۸ \right) r dr d\theta \\ &= \left(\int_۰^{۲\pi} d\theta \right) \left(\int_۰^۲ ۲r^۳ + ۸r\, dr \right) = ۲\pi\,(۸ + ۱٦) = ۴۸\pi \end{aligned}$$

اکنون مقدار خواسته شده را به کمک قضیه محاسبه می‌کنیم. برای این منظور توجه می کنیم که درون رویهٔ بستهٔ جهتدار S عبارت است از

$$V \,:\, ۴ - x^۲ - y^۲ \le z \le x^۲ + y^۲ - ۴$$

با توجه به شکل ۲.۲۴—(ب)، تصویر V بر صفحهٔ Oxy عبارت است از تصویر محل برخورد دو رویهٔ $S_۱$ و $S_۲$. لبهٔ این قرس عبارت است از دایرهٔ



شکل ۲۵.۲: (الف) مسألهٔ ۴ از امتحان سیزدهم (ب) مسألهٔ ۵ از امتحان سیزدهم

$\text{۴} = x^{\text{۲}} - y^{\text{۲}} = x^{\text{۲}} - y^{\text{۲}} - \text{۴}$ یا $\text{۴} = x^{\text{۲}} + y^{\text{۲}}$. بنابراین اگر فرض شود $D \ :\ x^{\text{۲}} + y^{\text{۲}} \leq \text{۴}$، داریم $V \ :\ \text{۴} - x^{\text{۲}} - y^{\text{۲}} \leq z \leq x^{\text{۲}} + y^{\text{۲}} - \text{۴} \,,\ (x, y) \in D$ و بنابراین

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{F})\ dV &= \iiint\limits_{\Omega} (\text{۱} + \text{۱} + \text{۱})\ dV = \text{۳} \iiint\limits_{\Omega} dV \\
&= \text{۳} \iint\limits_{D} \Big((\text{۴} - x^{\text{۲}} - y^{\text{۲}}) - (x^{\text{۲}} + y^{\text{۲}} - \text{۴}) \Big)\ dA \\
&= \text{٦} \iint\limits_{D} \left(\text{۴} - x^{\text{۲}} - y^{\text{۲}} \right)\ dA \stackrel{(\text{۱})}{=} \text{٦} \iint\limits_{D'} \left(\text{۴} - r^{\text{۲}} \right)\ dA' \\
&= \text{٦} \left(\int_{\circ}^{\text{۲}\pi} d\theta \right) \left(\int_{\circ}^{\text{۲}} \left(\text{۴}t - r^{\text{۳}} \right)\ dr \right) \\
&= \text{٦}\,(\text{۲}\pi) \left[\text{۲}r^{\text{۲}} - \frac{r^{\text{۴}}}{\text{۴}} \right]_{\circ}^{\text{۲}} = \text{۱۲}\pi\,(\text{۸} - \text{۴}) = \text{۴۸}\pi
\end{aligned}$$

که در (۱) از تغییر مختصات قطبی استفاده نموده‌ایم و D' تصویر D در صفحهٔ $Or\theta$ است: $D' \ :\ \circ \leq \theta \leq \text{۲}\pi \,,\ \circ \leq r \leq \text{۲}$.

پاسخ مسأله ۴) منحنی C لبهٔ قرص $S \ :\ z = \text{۲}\,;\ (x, y) \in D$ است که در آن $D \ :\ x^{\text{۲}} + y^{\text{۲}} \leq a^{\text{۲}}$. به شکل ۲۵.۲—(الف) توجه شود. با توجه به جهت معرفی شده برای منحنی C، داریم $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$ بعلاوه، چون S موازی Oxy است داریم $d\sigma = dxdy$. برای استفاده از قضیه، به محاسبهٔ پیچش میدان $\mathbf{F}$ نیاز داریم.

$$\mathrm{Curl}\,(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x^{۲}y^{۳} & ۱ & z \end{vmatrix} = \overrightarrow{\left(\circ, \circ, -۳x^{۲}y^{۲}\right)}$$

به این ترتیب، به کمک قضیهٔ استوکس داریم:

$$\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} &= \iint\limits_{(S)} \overrightarrow{\left(\circ, \circ, -۳x^{۲}y^{۲}\right)} \bullet (-\mathbf{k})\ dxdy = ۳ \iint\limits_{D} x^{۲}y^{۲}\ dxdy \\
&= ۳ \iint\limits_{D'} r^{۲}\cos^{۲}\theta\, r^{۲}\sin^{۲}\theta\, r\, dr\, d\theta \\
&= ۳ \left(\int_{\circ}^{۲\pi} \cos^{۲}\theta \sin^{۲}\theta\, d\theta\right) \left(\int_{\circ}^{a} r^{۵} dr\right) \\
&= ۳ \left(\int_{\circ}^{۲\pi} \frac{\sin^{۲} ۲\theta}{۴}\right) \left(\frac{a^{۶}}{۶}\right) = \frac{a^{۶}}{۸} \int_{\circ}^{۲\pi} \frac{۱ - \cos ۴\theta}{۲}\, d\theta = \frac{a^{۶}}{۸}\pi
\end{aligned}$$

پاسخ مسأله ۵) جسم صلب مورد نظر عبارت است از

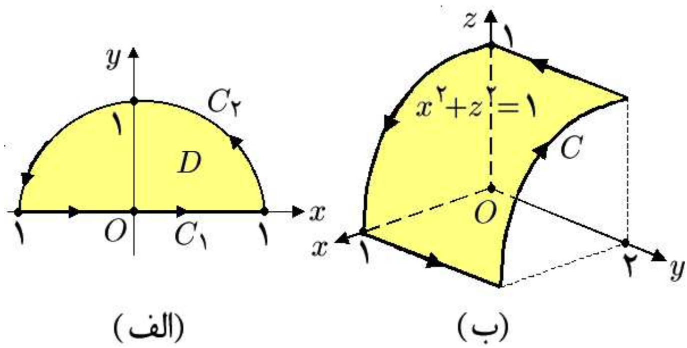
$$\Omega\ :\ x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} \leq ۴\,,\ x^{۲} + y^{۲} \leq ۳z^{۲}\,,\ \circ \leq z$$

تصویر این ناحیه در مختصات کروی عبارت است از

$$\begin{aligned}
\Omega'\ &:\ \rho^{۲} \leq ۴\,,\ \rho^{۲}\sin^{۲}\varphi \leq ۳\rho^{۲}\cos^{۲}\varphi\,,\ \circ \leq \rho\cos\varphi \\
&:\ \circ \leq \rho \leq ۲\,,\ \tan^{۲}\varphi \leq ۳\,,\ \circ \leq \varphi \leq \frac{\pi}{۲} \\
&:\ \circ \leq \rho \leq ۲\,,\ \circ \leq \circ \leq ۲\pi\,,\ \circ \leq \varphi \leq \frac{\pi}{۳}
\end{aligned}$$

در نتیجه، گشتاور مورد نظر عبارت است از

$$\begin{aligned}
I_{\circ} &= \iiint\limits_{\Omega} \left(x^{۲} + y^{۲} + z^{۲}\right) \delta\, dV = \iiint\limits_{\Omega} \left(x^{۲} + y^{۲} + z^{۲}\right) e^{\left(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}\right)^{۵/۲}} dV \\
&= \iiint\limits_{\Omega'} \rho^{۲} e^{\rho^{۵}}\, \rho^{۲} \sin\varphi\, dV' \\
&= \left(\int_{\circ}^{۲\pi} d\theta\right) \left(\int_{\circ}^{\pi/۳} \sin\varphi d\varphi\right) \left(\int_{\circ}^{۲} \rho^{۴} e^{\rho^{۵}} d\rho\right)
\end{aligned}$$



شکل ۲۶.۲: (الف) مسألهٔ ۶ از امتحان سیزدهم (ب) مسألهٔ ۸ از امتحان چهاردهم

$$= (۲\pi)\left[-\cos\varphi\right]_۰^{\pi/۳}\left[\frac{۱}{۵}e^{\rho^۵}\right]_۰^۲ = \frac{\pi}{۵}\left(e^{۳۲}-۱\right)$$

پاسخ مسألهٔ ۶—الف) منحنی C مورد نظر از دو تکه تشکیل می‌شود $C = C_۱ + C_۲$ (به شکل ۲۶.۲—(الف) توجه شود)، که در آن

$$\begin{aligned} C_۱ &= \overrightarrow{(-۱,۰)(۱,۰)} \ : \ \mathbf{r}(t) = (۱-t)\,\overrightarrow{(-۱,۰)} + t\overrightarrow{(۱,۰)} \ ; \quad ۰ \le t \le ۱ \\ C_۲ &: \begin{cases} x^۲+y^۲=۱ \\ ۰ \le y \end{cases} \ : \ \mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(\cos t, \sin t)} \ ; \quad ۰ \le t \le \pi \end{aligned}$$

به این ترتیب، داریم

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} &= \int_{C_۱}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} + \int_{C_۲}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} \\ &= \int_۰^۱ \overrightarrow{\left(e^{(۲t-۱)^۲}, ۲t-۱\right)}\bullet\overrightarrow{(۲,۰)}\,dt \\ &\quad + \int_۰^\pi \overrightarrow{\left(e^{\cos^۲ t}, \cos t\right)}\bullet\overrightarrow{(-\sin t, \cos t)}\,dt \\ &= ۲\int_۰^۱ e^{(۲t-۱)^۲}\,dt + \int_۰^\pi \left(-\sin t e^{\cos^۲ t} + \cos^۲ t\right)\,dt \\ &\overset{(۱)}{=} ۲\int_{-۱}^۱ e^{v^۲}\frac{۱}{۲}dv + \int_۱^{-۱} e^{u^۲}du + \int_۰^\pi \frac{۱+\cos^۲ t}{۲}dt = \frac{\pi}{۲} \end{aligned}$$

توضیح اینکه در (۱) فرض کرده‌ایم $u=\cos t$ و $v=۲t-۱$. بنابراین

$$du=-\sin t\,dt \quad , \quad dv=۲\,dt \quad , \quad \begin{array}{c|c} t & u \\ \hline ۰ & -۱ \\ \pi & ۱ \end{array} \quad , \quad \begin{array}{c|c} t & v \\ \hline ۰ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{array}$$

اکنون با توجه به اینکه درون منحنی C نیم قرس $D\ :\ x^۲+y^۲\le ۱\,,\ ۰\le y$ است، به کمک قضیهٔ گرین داریم:

$$\iint\limits_D (Q_x-P_y)\ dA=\iint\limits_D (۱-۰)\ dA=\iint\limits_D dA=\mathrm{Area}(D)=\frac{۱}{۲}\pi\times ۱^۲=\frac{\pi}{۲}$$

پاسخ مسألهٔ ٦—ب) ابتدا به کمک قضیهٔ هامیلتن و تشکیل معادلهٔ مشخصهٔ A، مقادیر ویژهٔ آن را بدست می آوریم:

$$|\lambda I-A|=۰ \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^۳-۱۰\lambda^۲+۸\lambda+٦۴=۰ \quad \Leftrightarrow \quad \lambda=-۲,۴,۸$$

اکنون بردارهای ویژهٔ نظیر به هر یک از این مقادیر ویژه را بدست می آوریم:

$$\text{(الف}\quad \lambda=-۲ \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} ۱۳x-۱۵z=-۲x \\ -۳x+۴y+۹z=-۲y \\ ۵x-۷z=-۲z \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} z=x \\ z=-y \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\ \mathbf{v}_۱=\begin{bmatrix} x \\ -x \\ x \end{bmatrix} \Rightarrow\ \mathbf{w}_۱=\frac{\mathbf{v}_۱}{\|\mathbf{v}_۲\|}=\begin{pmatrix} \sqrt{۳}/۳ \\ -\sqrt{۳}/۳ \\ \sqrt{۳}/۳ \end{pmatrix}$$

$$\text{(ب}\quad \lambda=۴ \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=z=۰ \\ y=y \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\ \mathbf{v}_۲=\begin{bmatrix} ۰ \\ y \\ ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow\ \mathbf{w}_۲=\frac{v_۲}{\|\mathbf{v}_۲\|}=\begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}$$

$$\text{(ج}\quad \lambda=۸ \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y=۰ \\ x=۳z \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\ \mathbf{v}_۳=\begin{bmatrix} ۳ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow\ \mathbf{w}_۳=\frac{v_۳}{\|v_۳\|}=\begin{pmatrix} ۳\sqrt{۱۰}/۱۰ \\ ۰ \\ \sqrt{۱۰}/۱۰ \end{pmatrix}$$

توضیح اینکه $\mathbf{w}_i$ بردار یکهٔ $\mathbf{v}_i$ است. در نتیجه، ماتریس قطری ساز عبارت است از:

$$C=[\mathbf{w}_۱,\mathbf{w}_۲,\mathbf{w}_۳]=\begin{bmatrix} \sqrt{۳}/۳ & ۰ & ۳\sqrt{۱۰}/۱۰ \\ -\sqrt{۳}/۳ & ۱ & ۰ \\ \sqrt{۳}/۳ & ۰ & \sqrt{۱۰}/۱۰ \end{bmatrix}$$

و به این ترتیب، داریم

$$C^{-1}AC = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۸ \end{bmatrix}$$

۱۴.۲ امتحان چهاردهم

صورت مسائل

۱) نشان دهید حد تابع زیر در $(۰,۰)$ وجود ندارد:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^۲}{|x|^۳+۲|y|^۳} & x^۲+y^۲ \neq ۰ \text{ اگر} \\ ۰ & x^۲+y^۲ = ۰ \text{ اگر} \end{cases}$$

۲) فرض کنید $u = f\left(x+\frac{y}{z}, y+\frac{x}{t}\right)$ رابطه‌ای بدون حضور f بین u و مشتقاتش بیابید.

۳) فرض کنید C یک فنر به ضابطهٔ $\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(۴\cos t, ۴\sin t, ۳t)}\,;\ ۰ \leq t \leq ۴\pi$ است. کنج فرنه، انحنا و تاب آنرا در نقطهٔ $X_۰ = (-۴, ۰, ۳\pi)$ بیابید.

۴) فرض کنید C همچون مسألهٔ ۳ باشد و نقطهٔ $(x,y,z) \in C$ دارای چگالی جرمی $z\sqrt{x^۲+y^۲}$ است. جرم C را محاسبه کنید.

۵) متوسط تابع $f = |x|+|y|$ بر حلقهٔ لوزوی $۱ \leq |x|+|y| \leq ۴$ را محاسبه کنید.

۶) اگر نقطهٔ به مختصات (x,y,z) از کرهٔ توپر $x^۲+y^۲+z^۲ \leq ۴z$ دارای چگالی جرمی $\frac{۲z}{x^۲+y^۲}$ باشد، گشتاور ماند این جسم حول محور z ها را محاسبه کنید.

۷) فرض کنید Ω هرم محدود به صفحات مختصات و صفحهٔ $x+y+z=۱$ است و S سطح خارجی آن می‌باشد. فضیهٔ گاوس را برای رویهٔ S و میدان برداری $\mathbf{F} = \overrightarrow{(۳z, y, ۲x)}$ تحقیق کنید.

۸) انتگرال $\mathbf{F} = \overrightarrow{(z, x, x)}$ را بر مسیر در شکل ۲۶.۲—(ب) محاسبه کنید.

پاسخ مسایل

پاسخ مسألهٔ ۱) با استفاده از مسیر $\mathbf{r}_a(t) = \overrightarrow{(t, at)}$ منتهی به $X_\circ = (\circ, \circ)$ داریم

$$\lim_{t \longrightarrow \circ} f\left(\mathbf{r}_a(t)\right) = \lim_{t \longrightarrow \circ} \frac{t^۳ a^۲}{t^۳ + a^۳ t^۳} = \frac{a^۲}{۱ + a^۳}$$

که به a بستگی دارد. بنابراین، حد مورد نظر وجود ندارد.

پاسخ مسألهٔ ۲) ابتدا از u نسبت به x و y مشتق گرفته و سپس $f_۱$ و $f_۲$ (یعنی، مشتقات جزئی f نسبت به اولین و دومین متغیرش) را بر حسب u_x و u_y محاسبه می‌کنیم.

$$\left\{\begin{array}{l} u_x = ۱f_۱ + f_۲/z \\ u_y = f_۱/z + f_۲ \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۱/z \\ ۱/z & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_۱ \\ f_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}$$

در نتیجه، بنابه قاعدهٔ کرامر داریم

$$\begin{aligned} f_۱ &= \begin{vmatrix} f_۱ & ۱/z \\ f_۲ & ۱ \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} ۱ & ۱/z \\ ۱/z & ۱ \end{vmatrix} = z\frac{zu_x - u_y}{z^۲ - ۱} \\ f_۲ &= \begin{vmatrix} ۱ & f_۱ \\ ۱/z & f_۲ \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} ۱ & ۱/z \\ ۱/z & ۱ \end{vmatrix} = z\frac{zu_y - u_x}{z^۲ - ۱} \end{aligned}$$

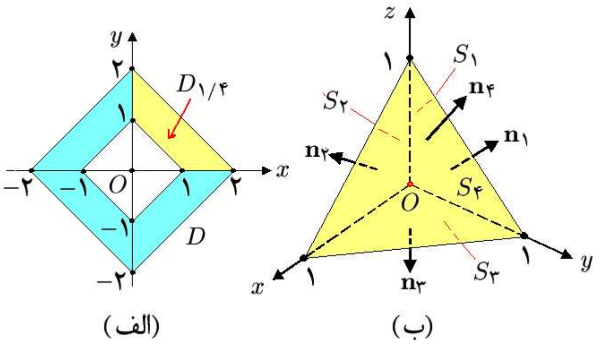
از طرفی $u_z = \frac{-y}{z^۲} f_۱ - \frac{x}{z^۲} f_۲$، بنابراین، با توجه به مقادیر $f_۱$ و $f_۲$ در بالا، داریم

$$u_z = \frac{-y}{z^۲}\left(z\frac{zu_x - u_y}{z^۲ - ۱}\right) - \frac{x}{z^۲}\left(z\frac{zu_y - u_x}{z^۲ - ۱}\right)$$

به عبارت دیگر $(x - yz)u_x + (y - xz)u_y = z(z^۲ - ۱)u_z$، که در آن f حضور ندارد.

پاسخ مسألهٔ ۳) ابتدا توجه می‌کنیم که

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) &= \overrightarrow{(-۴ \sin t, ۴ \cos t, ۳)} \\ \mathbf{r}''(t) &= \overrightarrow{(-۴ \cos t, -۴ \sin t, \circ)} \\ \mathbf{r}'''(t) &= \overrightarrow{(۴ \sin t, -۴ \cos t, \circ)} \\ \mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -۴ \sin t & ۴ \cos t & ۳ \\ -۴ \cos t & -۴ \sin t & \circ \end{vmatrix} = \overrightarrow{(۱۲ \sin t, -۱۲ \cos t, ۱۶)} \end{aligned}$$



شکل ۲۷.۲: (الف) مسألهٔ ۵ از امتحان چهاردهم (ب) مسألهٔ ۷ از امتحان چهاردهم

از طرفی $X_0 = \mathbf{r}(\pi)$ و بنابراین، داریم

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}(\pi) &= \frac{\mathbf{r}'(\pi)}{\|\mathbf{r}'(\pi)\|} = \frac{1}{5}\overrightarrow{(4, 0, 3)} \\
\mathbf{B}(\pi) &= \frac{\mathbf{r}'(\pi) \times \mathbf{r}''(\pi)}{\|\mathbf{r}'(\pi) \times \mathbf{r}''(\pi)\|} = \frac{1}{5}\overrightarrow{(0, 3, 4)} \\
\mathbf{N}(\pi) &= \mathbf{B}(\pi) \times \mathbf{T}(\pi) = \frac{1}{25}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{25}\overrightarrow{(9, 16, -12)} \\
\kappa(\pi) &= \frac{\|\mathbf{r}'(\pi) \times \mathbf{r}''(\pi)\|}{\|\mathbf{r}'(\pi)\|^3} = \frac{20}{(5)^3} = \frac{4}{25} \\
\tau(\pi) &= \frac{(\mathbf{r}'(\pi) \times \mathbf{r}''(\pi)) \bullet \mathbf{r}'''(\pi)}{\|\mathbf{r}'(\pi) \times \mathbf{r}''(\pi)\|^2} = \frac{48}{(20)^2} = \frac{3}{25}
\end{aligned}$$

پاسخ مسألهٔ ۴) کافی است از چگالی δ بر منحنی C انتگرال بگیریم:

$$\begin{aligned}
m &= \int_C \delta\, ds \\
&= \int_0^{4\pi} 3t\sqrt{(4\cos t)^2 + (4\sin t)^2}\sqrt{(-4\sin t)^2 + (4\cos t)^2 + (3)^2}\, dt \\
&= \int_0^{4\pi} (3t)(4)(5)\, dt = 60\int_0^{4\pi} t\, dt = 60\frac{(4\pi)^2}{2} = 480\pi^2
\end{aligned}$$

پاسخ مسألهٔ ۵) ناحیهٔ مورد نظر یک حلقهٔ لوزی شکل محدود بین دو لوزی به معادلات $|x| + |y| = 2$ و $|x| + |y| = 1$ است. به شکل ۲۷.۲—(الف) توجه شود. به دلیل

تقارنی که شکل و نیز تابع f نسبت به مبداء دارند، کافی است محاسبات را تنها بر قسمتی از D که در ربع اول قرار دارد محاسبه کنیم. یعنی، بر مجموعهٔ

$$D_{۱/۴}\ :\ ۱ \leq x+y \leq ۲\,,\ ۰ \leq x\,,\ ۰ \leq y$$

این مجموعه را به صورت $D_۲ - D_۱$ می‌نویسیم که در آن

$$D_۱\ :\ ۰ \leq x \leq ۱\,,\ ۰ \leq y \leq ۱-x \quad , \quad D_۲\ :\ ۰ \leq x \leq ۲\,,\ ۰ \leq y \leq ۲-x$$

بنابراین، داریم

$$\begin{aligned}
\mathrm{Area}\,(D) &= ۴\mathrm{Area}\left(D_{۱/۴}\right) = ۴\mathrm{Area}\,(D_۲) - ۴\mathrm{Area}\,(D_۱)\\
&= ۴ \times ۲ \times ۲ \times \frac{۱}{۲} - ۴ \times ۱ \times ۱ \times \frac{۱}{۲} = ۶\\
\underset{D}{\mathrm{mean}}\, f &= \frac{۱}{\mathrm{Area}(D)} \iint\limits_{D} f\, dA = \frac{۱}{۶} \iint\limits_{D} (|x|+|y|)\, dA\\
&= \frac{۱}{۶} \times ۴ \times \iint\limits_{D_{۱/۴}} (x+y)\, dA = \frac{۲}{۳} \times ۲ \times \iint\limits_{D_{۱/۴}} y\, dA\\
&= \frac{۴}{۳} \iint\limits_{D_۲} y\, dA - \frac{۴}{۳} \iint\limits_{D_۱} y\, dA\\
&= \frac{۴}{۳} \int_۰^۲ \left[\int_۰^{۲-x} y\, dy\right] dx - \frac{۴}{۳} \int_۰^۱ \left[\int_۰^{۱-x} y\, dy\right] dx\\
&= \frac{۴}{۳} \int_۰^۲ \frac{(۲-x)^۲}{۲}\, dx - \frac{۴}{۳} \int_۰^۱ \frac{(۱-x)^۲}{۲}\, dx = \frac{۱۶}{۹} - \frac{۲}{۹} = \frac{۱۴}{۹}
\end{aligned}$$

پاسخ مسألهٔ ۶) در این مسأله ناحیهٔ انتگرالگیری $\Omega\ :\ x^۲+y^۲+z^۲ \leq ۴z$ است. این ناحیه را به مختصات کروی می‌بریم.

$$\begin{aligned}
\Omega' &: \ \rho^۲ \leq ۴\rho\cos\varphi\,,\ ۰ \leq \cos\varphi\\
&: \ ۰ \leq \rho \leq ۴\cos\varphi\,,\ ۰ \leq \varphi \leq \frac{\pi}{۲}\,,\ ۰ \leq \theta \leq \frac{\pi}{۲}
\end{aligned}$$

به این ترتیب، گشتاور خواسته شده برابر است با

$$I_z = \iiint\limits_{\Omega} \left(x^۲+y^۲\right) \delta\, dV = \iiint\limits_{\Omega} ۲z\, dV = ۲ \iiint\limits_{\Omega'} \rho\cos\varphi\rho^۲ \sin\varphi\, dV'$$

$$\begin{aligned}
&= ۲\left(\int_{\circ}^{۲\pi} dV\right)\left(\int_{\circ}^{\pi/۲}\left[\int_{\circ}^{۴\cos\varphi}\rho^{۳}\cos\varphi\sin\varphi\, d\rho\right]d\varphi\right)\\
&= ۲\,(۲\pi)\int_{\circ}^{\pi/۲}\frac{(۴\cos\varphi)^{۴}}{۴}\cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi\\
&= ۲^{۸}\pi\int_{\circ}^{\pi/۲}\cos^{۵}\varphi\sin\varphi\, d\varphi = ۲^{۸}\pi\left[-\frac{\cos^{٦}\varphi}{٦}\right]_{\circ}^{\pi/۲} = \frac{۲^{۷}}{۳}\pi
\end{aligned}$$

پاسخ مسألهٔ ۷) ابتدا به روش مستقیم محاسبه می‌کنیم. برای این منظور، رویهٔ مورد نظر را S که یک هرم است، به چهار مثلث افراز می‌کنیم $S = S_۱ + S_۲ + S_۳ + S_۴$، که در آن

$$\begin{aligned}
&S_۱ : x = \circ\,, && \circ \le y \le ۱\,,\ \circ \le z \le ۱ - y\,,\\
&S_۲ : y = \circ\,, && \circ \le x \le ۱\,,\ \circ \le z \le ۱ - x\,,\\
&S_۳ : z = \circ\,, && \circ \le x \le ۱\,,\ \circ \le y \le ۱ - x\,,\\
&S_۴ : x + y + z = \circ\,, && \circ \le x \le ۱\,,\ \circ \le y \le ۱ - x\,.
\end{aligned}$$

اگر $\mathbf{n}_۱$ بردار نرمال رویهٔ S_i و $d\sigma_i$ المان مساحت آن باشد، آنگاه با توجه به شکل ۲۷.۲—(ب) داریم

$$\begin{aligned}
&\mathbf{n}_۱ = -\mathbf{i} && d\sigma_۱ = dydz && \mathbf{n}_۲ = -\mathbf{j}\\
&d\sigma_۲ = dxdz && \mathbf{n}_۳ = -\mathbf{k} && d\sigma_۳ = dxdy\\
&\mathbf{n}_۴ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}\overrightarrow{(۱,۱,۱)} && d\sigma = \sqrt{۳}\,dxdy &&
\end{aligned}$$

پس، در مجموع داریم

$$\begin{aligned}
\oiint_{(S)} \mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\, d\sigma &= \iint_{(S_۱)} + \cdots + \iint_{(S_۴)} = \iint_{D_۱}\overrightarrow{(۳z, y, \circ)}\bullet\overrightarrow{(-۱,\circ,\circ)}\, dydz\\
&+ \iint_{D_۲}\overrightarrow{(۳z,\circ,۲x)}\bullet\overrightarrow{(\circ,-۱,\circ)}\, dxdz + \iint_{D_۳}\overrightarrow{(\circ, y, ۲x)}\bullet\overrightarrow{(\circ,\circ,-۱)}\, dxdy\\
&+ \iint_{D_۴}\overrightarrow{(۳-۳x-۳y, y, ۲x)}\bullet\overrightarrow{(۱,۱,۱)}\, dxdy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_{D_1} -3z\,dydz + 0 + \iint_{D_3} -2x\,dxdy + \iint_{D_4} (3 - x - 2y)\,dxdy \\
&= \iint_{D_1} (3 - 8x)\,dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} (3 - 8x)\,dy\right] dx \\
&= \int_0^1 \Big[3(1 - x) - 8x(1 - x)\Big] dx = \left[8\frac{x^3}{3} - \frac{11}{2}x^2 + 3x\right]_0^1 = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

از طرفی به کمک قضیهٔ گاوس، داریم

$$\begin{aligned}
\iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{F})\,dV &= \iiint_{\Omega} (0 + 1 + 0)\,dV \\
&= \frac{1}{6}\mathrm{Vol}(\Omega) = \frac{1}{6} \times 1 \times 1 \times = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

پاسخ مسألهٔ ۸) از قضیهٔ استوکس استفاده می‌کنیم. رویه‌ای S که لبهٔ آن منحنی C است، عبارت است از قسمتی از استوانهٔ $x^2 + z^2 = 1$ که در یک هشتم اول قرار داشته و نیز در نیم فضای $y \leq 2$ قرار دارد. بنابراین $S : z = \sqrt{1 - x^2}\,,\ (x, y) \in D$ که در آن $D : 0 \leq x \leq 1\,,\ 0 \leq y \leq 2$. از طرفی

$$\begin{aligned}
\mathrm{Curl}(\mathbf{F}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ z & x & x \end{vmatrix} = \overrightarrow{(0 - 0, 1 - 0, 0 - 0)} = \overrightarrow{(0, 1, 0)} \\
d\sigma &= \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)^2 + (0)^2}\,dxdy = \frac{dxdy}{\sqrt{1 - x^2}} \\
\mathbf{n} &= \pm\frac{\overrightarrow{(2x, 0, 2z)}}{\sqrt{4x^2 + 0 + 4z^2}} = \pm\overrightarrow{\left(x, 0, \sqrt{1 - x^2}\right)}
\end{aligned}$$

که با توجه به شکل ۲.۲۶–(ب) حالت + مورد قبول است. به این ترتیب، داریم

$$\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} &= \iint_{(S)} \mathrm{Curl}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}\,d\sigma \\
&= \iint_D \overrightarrow{(0, 1, 0)} \bullet \overrightarrow{\left(x, 0, \sqrt{1 - x^2}\right)} \frac{dxdy}{\sqrt{1 - x^2}} = 0
\end{aligned}$$

۱۵.۲ امتحان پانزدهم

صورت مسائل

۱) در پیوستگی تابع $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^۳}{x^۲+(x+y)^۲} & (x,y) \leq (۰,۰) \\ ۰ & (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$ بر $\mathbb{R}^۲$ بحث کنید.

۲) نشان دهید که اگر $f\left(x - yz, y - xz\right) = ۰$ و f تابعی دیفرانسیلپذیر باشد، آنگاه $z = \frac{۱ - xz_y - yz_x}{۱ + xz_x + yz_y}$.

۳) ثابت کنید که منحنی زیر بر یک کره واقع است:

$$C \; : \; \mathbf{r}(t) = \overrightarrow{\left(\cos^۲ t, \cos t \sin t, \sin t\right)} \quad ; \quad ۰ \leq t \leq ۲\pi$$

۴) با تعویض ترتیب حدود، انتگرال بگیرید $\int_۰^{۱۲} \left[\int_{-\sqrt{y/۳}}^{\sqrt{y/۳}} e^{x^۳ - ۱۲x}\, dx\right] dy$.

۵) قیضیه گرین را برای میدان برداری $\mathbf{F} = \overrightarrow{\left(y^۲, x^۲\right)}$ و مرز ناحیهٔ D تحقیق کنید: $D \; : \; ۰ \leq x \,,\, ۰ \leq y \,,\, x + ۲y \leq ۲$.

٦) اگر $\Omega \; : \; |x| + |y| + |z| \leq ۱$ و چگالی نقطهٔ به مختصات (x,y,z) از Ω برابر $|z|$ باشد جرم Ω را محاسبه کنید.

۷) فرض کنید Ω ناحیهٔ محدود به استوانهٔ $x^۲ + y^۲ = ۴$ و صفحهٔ $z = ۴$ واقع در یک هشتم اول است و S سطح خارجی آن و $\mathbf{n}$ بردار برونسوی S می‌باشد. انتگرال میدان برداری زیر را بر S محاسبه کنید:

$$\mathbf{F} = \left(٦x^۲ + ۲xy\right) \mathbf{i} + \left(۲y + x^۲ z\right) \mathbf{j} + \left(۴x^۲ y^۳\right) \mathbf{k}$$

۸) در صورتی که $C \; : \; \mathbf{r}(t) = \overrightarrow{\left(a \sin^۲ t, a \sin^۲ t, a \cos^۲ t\right)} \; ; \; ۰ \leq t \leq ۲\pi$ و $\mathbf{F} = \overrightarrow{(y + z, z + x, x + y)}$. مطلوبست انتگرال $\mathbf{F}$ بر C.

پاسخ مسائل

پاسخ مسئلهٔ ۱) روشن است که f در $X_\circ \neq (\circ,\circ)$ پیوسته است. در $X_\circ = (\circ,\circ)$ نیز

$$|f(x,y)-\circ| = \frac{|x|^{۳}}{x^{۲}+(x+y)^{۲}} \leq \frac{|x|^{۳}}{x^{۲}+\circ} = |x| < \delta = \varepsilon$$

پس f بر $\mathbb{R}^{۲}$ پیوسته است.

پاسخ مسألهٔ ۲) از طرفین رابطهٔ داده شده نسبت به x و y مشتق می‌گیریم:

$$(۱-yz_x)\,f_u-(z+xz_x)\,f_v=\circ \quad , \quad -(z+yz_y)\,f_u+(۱-xz_y)\,f_u=\circ$$

پس به شکل ماتریسی داریم:

$$\begin{pmatrix} ۱-yz_x & -z-xz_x \\ -z-yz_y & ۱-xz_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_u \\ f_v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \circ \\ \circ \end{pmatrix}$$

که شرط غیر ثابت بودن f به معنی صفر شدن دترمینان ماتریس ضرایب آن است. بنابراین $(z+xz_x)\,(z+yz_y)=(۱-xz_y)\,(۱-yz_x)$ که همان معادلهٔ خواسته شده است.

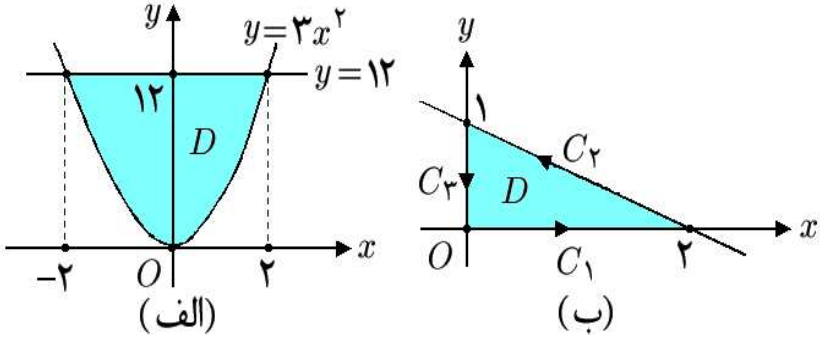
پاسخ مسألهٔ ۳) یک راه این است که نشان دهیم مرکز کرهٔ بوسان آن ثابت است. راه دوم این است که نشان دهیم، مختصات آن در معادلهٔ یک کره صدق می‌کند:

$$\begin{cases} x=\cos^{۲} t \\ y=\cos t\sin t \\ z=\sin t \end{cases} \Rightarrow\; x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=\cos^{۲} t\left(\cos^{۲} t+\sin^{۲} t\right)+\sin^{۲} t=۱$$

یعنی، منحنی C بر کرهٔ $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۱$ قرار دارد.

پاسخ مسألهٔ ۴) در اینجا $D\ :\ \circ\leq y\leq ۱۲\,,\,-\sqrt{y/۳}\leq x\leq\sqrt{y/۳}$ که ناحیهٔ محدود به سهمی $y=۳x^{۲}$ و خط $y=۱۲$ است. به شکل ۲۸.۲—(الف) توجه شود. با برخورد دادن این این دو منحنی، بدست می‌آوریم $۳x^{۲}=۱۲$ یا $x=\pm ۲$. لذا، D به عنوان x—منظم عبارت است از $D\ :\ -۲\leq x\leq ۲, ۱۲\leq y\leq ۳x^{۲}$. بنابراین، انتگرال مورد نظر برابر است با

$$\begin{aligned} I &= \int_{-۲}^{۲}\left[\int_{۳x^{۲}}^{۱۲} e^{x^{۳}-۱۲x}\,dy\right]dx=\int_{-۲}^{۲}\left[ye^{x^{۳}-۱۲x}\right]_{۳x^{۲}}^{۱۲}dx \\ &= \int_{-۲}^{۲}\left(۱۲-۳x^{۲}\right)e^{x^{۳}-۱۲x}\,dx=\left[-e^{x^{۳}-۱۲x}\right]_{-۲}^{۲}=۲\sinh ۱٦ \end{aligned}$$



شکل ۲۸.۲: (الف) مسألهٔ ۴ از امتحان پانزدهم (ب) مسألهٔ ۵ از امتحان پانزدهم

پاسخ مسألهٔ ۵) الف) به کمک قضیه. برای این منظور توجه می‌کنیم که درون منحنی C عبارت از $D\ :\ ۰ \le x \le ۲\,,\ ۰ \le y \le ۱ - x/۲$ است (به شکل ۲۸.۲—(ب) توجه شود) و بنابراین

$$\begin{aligned}\iint\limits_D (Q_x - P_y)\ dxdy &= \iint\limits_D (۲x - ۲y)\ dxdy \\ &= \int_۰^۲ \left[\int_۰^{۱-\frac{x}{۲}} ۲\,(x-y)\ dy\right] dx = \int_۰^۲ \left[۲xy - y^۲\right]_۰^{۱-x/۲}\ dx \\ &= \int_۰^۲ \left(۲x - x^۲ - ۱ + x - \frac{x^۲}{۴}\right) dx = \left[-\frac{۵x^۳}{۱۲} + \frac{۳x^۲}{۲} - x\right]_۰^۲ = \frac{۲}{۳}\end{aligned}$$

ب) مستقیم. در این حالت C اجتماع سه تکه پاره خط می‌باشد: $C = C_۱ + C_۲ + C_۳$ که در آن

$$\begin{aligned}C_۱ &: \mathbf{r}(t) = (۱-t)\overrightarrow{(۰,۰)} + t\overrightarrow{(۲,۰)} = \overrightarrow{(۲t,۰)}\ ;\quad ۰ \le t \le ۱\\ C_۲ &: \mathbf{r}(t) = (۱-t)\overrightarrow{(۲,۰)} + t\overrightarrow{(۰,۱)} = \overrightarrow{(۲-۲t,t)}\ ;\quad ۰ \le t \le ۱\\ C_۳ &: \mathbf{r}(t) = (۱-t)\overrightarrow{(۰,۱)} + t\overrightarrow{(۰,۰)} = \overrightarrow{(۰,۱-t)}\ ;\quad ۰ \le t \le ۱\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\oint_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} \;=\; \int_{C_۱} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} + \int_{C_۲} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} + \int_{C_۳} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{۰}^{۱} \mathbf{F}\left(۲t, ۰\right) \bullet \overrightarrow{(۲, ۰)}\, dt + \int_{۰}^{۱} \mathbf{F}\left(۲-۲t, t\right) \bullet \overrightarrow{(-۲, ۱)}\, dt \\
&\qquad + \int_{۰}^{۱} \mathbf{F}\left(۰, ۱-t\right) \bullet \overrightarrow{(۰, -۱)}\, dt \\
&= \int_{۰}^{۱} \overrightarrow{\left(۰, ۴t^{۲}\right)} \bullet \overrightarrow{(۲, ۰)}\, dt + \int_{۰}^{۱} \overrightarrow{\left(t^{۲}, ۴-۸t+۴t^{۲}\right)} \bullet \overrightarrow{(-۲, ۱)}\, dt \\
&\qquad + \int_{۰}^{۱} \overrightarrow{\left(۱-۲t+t^{۲}, ۰\right)} \bullet \overrightarrow{(۰, -۱)}\, dt \\
&= \int_{۰}^{۱} \left(-۲t^{۲}+۴-۸t+۴t^{۲}\right) dt = \left[۲\frac{t^{۳}}{۳} - ۴t^{۲} + ۴t\right]_{۰}^{۱} = \frac{۲}{۳}
\end{aligned}$$

پاسخ مسألهٔ ٦) به دلیل تقارن کافی است انتگرال $|z|$ را بر یک هشتم Ω که در یک هشتم اول است محاسبه کنیم و سپس حاصل را در هشت ضرب کنیم:

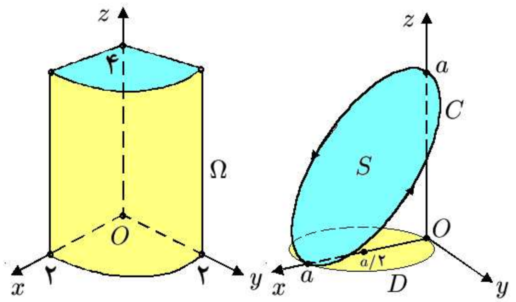
$$\begin{aligned}
\Omega_{۱/۸} &: \quad ۰ \leq x\,,\ ۰ \leq z\,,\ x+y+z \leq ۱ \\
&: \quad ۰ \leq x \leq ۱\,,\ ۰ \leq y \leq ۱-x,\ ۰ \leq z \leq ۱-x-y
\end{aligned}$$

به این ترتیب، داریم

$$\begin{aligned}
m &= \iiint\limits_{\Omega} |z|\, dV = ۸ \iiint\limits_{\Omega_{۱/۸}} z\, dV = ۸ \int_{۰}^{۱} \left[\int_{۰}^{۱-x} \left[\int_{۰}^{۱-x-y} z\, dz\right] dy\right] dx \\
&= ۸ \int_{۰}^{۱} \left[\int_{۰}^{۱-x} \frac{۱-x-y^{۲}}{۲}\, dy\right] dx = ۸ \int_{۰}^{۱} \frac{(۱-x)^{۳}}{٦}\, dx = \frac{۱}{۳}
\end{aligned}$$

پاسخ مسألهٔ ۷) حجم مورد نظر یک چهارم از یک استوانهٔ توپر قائم به شکل ۲۹.۲– (الف) است. این حجم سطح خارجی یک رویهٔ بستهٔ جهتدار با جهت استاندارد است. بنابراین از قضیهٔ دیورژانس می‌توان استفاده نمود:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{(S)} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, dV &= \iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{F})\ dV = \iiint\limits_{\omega} \left(۱۲x+۲y+۲\right)\ dV \\
&= \int_{۰}^{۲} \left[\int_{۰}^{\sqrt{۴-y^{۲}}} \left[\int_{۰}^{۴} \left(۱۲x+۲y+۲\right)\ dz\right] dy\right] dx \\
&= \int_{۰}^{۲} \left[\int_{۰}^{\sqrt{۴-y^{۲}}} \left(۴۸x+۸y+۸\right)\ dy\right] dx
\end{aligned}$$



(الف) (ب)

شکل ۲۹.۲: (الف) مسألهٔ ۷ از امتحان پانزدهم (ب) مسألهٔ ۸ از امتحان پانزدهم

$$= ۸\int_{۰}^{\pi/۲}\left[\int_{۰}^{۲}(۶r\cos\theta + r\sin\theta + ۸)\, r\, dr\right] d\theta$$

$$= ۸\int_{۰}^{\pi/۲}\left(۱۶\cos\theta + \frac{۸}{۳}\sin\theta + ۲\right) d\theta = \frac{۸}{۳}(۵۶ + ۳\pi)$$

پاسخ مسألهٔ ۸) از قضیهٔ استوکس استفاده می‌کنیم. برای این منظور باید رویه‌ای S را بیابیم که C لبهٔ آن بوده و جهت S با C سازگار باشد. توجه می‌کنیم که

$$C\ :\ \begin{cases} a\left(\frac{۱-\cos ۲t}{۲}\right) = x \\ a\sin ۲t = y \\ a\left(\frac{۱+\cos ۲t}{۲}\right) = z \end{cases} \quad : \quad \begin{cases} \cos ۲t = (a - ۲x)/a \\ \sin ۲t = y/a \\ \cos ۲t = ۲z/a - ۱ \end{cases}$$

بنابراین C مقطع دو استوانهٔ $(۲x-a)^۲ + y^۲ = a^۲$ و صفحهٔ $x + z = a$ است:

$$C\ :\ (۲x-a)^۲ + y^۲ = a^۲\ ,\ z + x = a$$

به شکل ۲۹.۲—(ب) توجه شود. بنابراین، می‌شود فرض کرد S قسمتی از صفحهٔ $x + z = a$ است که توسط استوانهٔ $(۲x-a)^۲ + y^۲ = a^۲$ بریده شده است و جهت بردار قائم بر آن $\mathbf{n}$ رو به بالا است. به بیان دیگر، اگر $f = x + y$ تابع معرف S باشد، آنگاه

$$S\ :\ x + z = a\,;\ (x,y)\in D = \quad , \quad D\ :\ (۲x-a)^۲ + y^۲ \le a^۲$$

$$\mathbf{n} = \pm\frac{f'}{\|f'\|} = \pm\frac{\overrightarrow{(۱,۰,۱)}}{\sqrt{۲}} \quad , \quad d\sigma = \frac{\|f'\|}{|f_z|}\,dxdy = \sqrt{۲}\,dxdy$$

البته بنابه مفروضات مسأله حالت + در $\mathbf{n}$ مورد قبول است. همچنین، ملاحظه می‌گردد که

$$\operatorname{Curl}(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y+z & z & x \end{vmatrix} = \overrightarrow{(-۱, ۰, -۱)}$$

پس، در مجموع داریم

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} &= \iint_{(S)} \operatorname{Curl}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}\, d\sigma \\ &= \iint_D \overrightarrow{(-۱, ۰, -۱)} \bullet \overrightarrow{\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}, ۰, \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)} \sqrt{۲}\, dxdy \\ &= \iint_D -۲\, dxdy = -۲ \operatorname{Area}(D) = -۲ \times \pi \times a^۲ = -۲\pi a^۲ \end{aligned}$$

۱۶.۲ امتحان شانزدهم

صورت مسایل

۱) فاصلهٔ دو خط $\begin{cases} x + ۲y = ۳ \\ y + ۲z = ۳ \end{cases}$ و $\begin{cases} x + y + z = ۶ \\ x - ۲z = -۵ \end{cases}$ را بیابید.

۲) تنها به یکی از دو سؤال زیر پاسخ دهید:

الف) با فرض اینکه $C \ : \ \mathbf{r}(t) = ۲t\mathbf{i} + \left(t^۲ - ۱\right)\mathbf{j}$. معادلهٔ دایرهٔ بوسان (خمیدگی) منحنی C را در $t = ۱$ بدست آورید.

ب) کنج فرنهٔ منحنی $C \ : \ \mathbf{r}(t) = \overrightarrow{\left(t - ۱, t^۲, t^۳ - t^۲\right)}$ را در نقطهٔ $t = ۱$س بیابید.

۳) در پیوستگی تابع $f(x, y)$ بر $\mathbb{R}$ بحث کنید:

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{۴ - x^۲ - y^۲} & x^۲ + y^۲ \leq ۴ \text{ اگر} \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

۴) فرض کنید $u = f(x,y)$ تابعی با مشتقات دوم پیوسته باشد طوری که n ای وجود داشته باشد که بازاًء هر t، x و y داشته باشیم $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$. در این صورت نشان دهید که $x^۲\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲} + ۲xy\frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y} + y^۲\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲} = n(n-۱)f$.

۵) فرض کنید D ناحیهٔ محدود به هذلولی‌های $xy = ۱$ و $xy = ۹$ و خطوط $y = x$ و $y = ۴x$ واقع در ربع اول باشد و $f = \sqrt{y/x} + \sqrt{xy}$. انتگرال f بر D را محاسبه کنید.

٦) فرض کنید Ω قسمتی از نیم فضای بالایی باشد که توسط مخروط $z^۲ = ۳\left(x^۲+y^۲\right)$ و کرهٔ $x^۲+y^۲+z^۲ = ۳٦$ جدا شده است. اگر تابع چگالی حجمی Ω به صورت $\delta = e^{(x^۲+y^۲+z^۲)^۲}$ باشد، گشتاور جرم (اول) آن را نسبت به مبداء مختصات محاسبه کنید.

۷) فرض کنید $\mathbf{F} = y\mathbf{i}+x^۲\mathbf{j}+\left(x^۲+y^۴\right)^{۳/۴}\sin\left(e^{\sqrt{xyz}}\right)$ و $\mathbf{n}$ بردار قائم برونسوی پوستهٔ بیضوی S به معادلهٔ $۴x^۲ + ۹y^۲ + ۳٦z^۲ = ۳٦$ با $z \leq ۰$ باشد. مقدار انتگرال $\iint_{(S)} (\nabla \times \mathbf{F})\, d\sigma$ را محاسبه کنید.

۸) اگر $\mathbf{F}(x,y,z) = xz^۲\mathbf{i} + yx^۲\mathbf{j} - ۲yz\mathbf{j}$ و S سطح خارجی جسم محدود به سهمی‌گون بیضوی $y = x^۲ + z^۲$ و استوانهٔ $x^۲ + z^۲ = ۹$ و صفحهٔ xOz باشد، انتگرال $\mathbf{F}$ بر S را بیابید.

حل مسایل

پاسخ مسألهٔ ۱) ابتدا دو خط داده شده را به حالت استاندارد می‌نویسیم:

$$\ell_۱ \quad : \quad \begin{cases} x+y+z=٦ \\ x-۲z=-۵ \end{cases} \quad : \quad \begin{cases} x = ۲z-۵ \\ y=-۳z+۱۱ \end{cases}$$

$$: \quad \begin{cases} z = \frac{x+۵}{۲} \\ z = \frac{y-۱۱}{-۳} \end{cases} \quad : \quad \frac{x+۵}{۲} = \frac{y-۱۱}{-۳} = \frac{z-۰}{۱}$$

$$\ell_۲ \quad : \quad \begin{cases} x+۲y=۳ \\ y+۲z=۳ \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} y = \frac{۳-x}{۲} \\ y = ۳-۲z \end{cases}$$

$$: \quad \frac{x-۳}{-۲} = \frac{y-۰}{۱} = \frac{z-۳/۲}{-۱/۲} \quad : \quad \frac{x-۳}{۴} = \frac{y-۰}{-۲} = \frac{z-۳/۲}{۱}$$

در نتیجه اگر $\mathbf{v}_i$ بردار هادی ℓ_i و X_i یک تکیه‌گاه برای ℓ_i باشد، در این صورت:

$$\mathbf{v}_۱ = \overrightarrow{(۲, -۳, ۱)} \quad , \quad X_۱ = (۳, ۰, ۳/۲)$$
$$\mathbf{v}_۲ = \overrightarrow{(۴, -۲, ۱)} \quad , \quad X_۲ = (-۵, ۱۱, ۰)$$

بنابرین، اگر $d(\ell_۱, \ell_۲)$ فاصلهٔ $\ell_۱$ تا $\ell_۲$ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_۱ \times \mathbf{v}_۲ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۲ & -۳ & ۱ \\ ۴ & -۲ & ۱ \end{vmatrix} = \overrightarrow{(-۱, ۲, ۸)} \\
X_۲ - X_۱ &= \overrightarrow{\left(۳, ۰, \frac{۳}{۲}\right)} - \overrightarrow{(-۵, ۱۱, ۰)} = \overrightarrow{\left(۸, -۱۱, \frac{۳}{۲}\right)} \\
d(\ell_۱, \ell_۲) &= \frac{|(\mathbf{v}_۱ \times \mathbf{v}_۲) \bullet (X_۲ - X_۱)|}{\|\mathbf{v}_۱ \times \mathbf{v}_۲\|} = \frac{|-۸ - ۲۲ + ۱۲|}{\sqrt{۱ + ۴ + ٦۴}} = \frac{۱۸}{\sqrt{٦۹}}
\end{aligned}$$

پاسخ مسألهٔ ۲) الف) با توجه به اینکه $x(t) = ۲t$ و $y(t) = t^۲ - ۱$، داریم

$$\begin{aligned}
\kappa(۱) &= \frac{x''(۱)y'(۱) - y''(۱)x'(۱)}{(x'(۱)^۲ + y'(۱)^۲)^{۳/۲}} = \frac{(۰)(۱) - (۲)(۲)}{(۲^۲ + ۱^۲)^{۳/۲}} = \frac{-۴}{۵\sqrt{۵}} \\
R(۱) &= \frac{۱}{|\kappa(۱)|} = \frac{۵\sqrt{۵}}{۴}
\end{aligned}$$

مرکز خمیدگی در نقطهٔ $\mathbf{r}(۱)$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{r}(۱) + R(۱)\mathbf{N}(۱) = \overrightarrow{(۲, ۰)} + \frac{۵\sqrt{۵}}{۴}\frac{\mathbf{r}'(۱)^{\perp}}{\|\mathbf{r}'(۱)\|} \\
&= \overrightarrow{(۲, ۰)} + \frac{۵\sqrt{۵}}{۴}\frac{\overrightarrow{(۲, ۲)}}{۲} = \overrightarrow{\left(۲ + \frac{۵\sqrt{۵}}{۴}, \frac{۵\sqrt{۵}}{۴}\right)}
\end{aligned}$$

ب) ابتدا مشتقات اول و دوم $\mathbf{r}(t)$ را در $t = ۱$ محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'(۱) &= \overrightarrow{\left(۱, ۲t - ۱, ۳t^۲ - ۲t\right)}\Big|_{t=۱} = \overrightarrow{(۱, ۱, ۱)} \\
\mathbf{r}''(۱) &= \overrightarrow{(۰, ۲, ٦t - ۲)}\Big|_{t=۱} = \overrightarrow{(۰, ۲, ۴)}
\end{aligned}$$

با توجه به اینکه

$$\mathbf{r}'(۱) \times \mathbf{r}''(۱) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۴ \end{vmatrix} = \overrightarrow{(۲, -۴, ۲)}$$

داریم

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}(۱) &= \frac{\mathbf{r}'(۱)}{\|\mathbf{r}'(۱)\|} = \frac{\overrightarrow{(۱,۱,۱)}}{\sqrt{۳}} = \overrightarrow{\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}, \frac{\sqrt{۳}}{۳}, \frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)} \\
\mathbf{B}(۱) &= \frac{\mathbf{r}'(۱)\times\mathbf{r}''(۱)}{\|\mathbf{r}'(۱)\times\mathbf{r}''(۱)\|} = \frac{\overrightarrow{(۲,-۴,۲)}}{\sqrt{۴+۱۶+۴}} = \overrightarrow{\left(\frac{\sqrt{۶}}{۶}, -\frac{\sqrt{۶}}{۳}, \frac{\sqrt{۶}}{۶}\right)} \\
\mathbf{N}(۱) &= \mathbf{B}(۱)\times\mathbf{T}(۱) = \frac{\sqrt{۲}}{۶}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۲ & ۱ \end{vmatrix} \\
&= \frac{\sqrt{۲}}{۶}\overrightarrow{(۳,۰,-۳)} = \overrightarrow{\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}, ۰, \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)}
\end{aligned}$$

پاسخ مسألهٔ ۳) اگر $X_۰ = (x_۰, y_۰)$ داخل دایرهٔ $C\ :\ x^۲ + y^۲ = ۴$ باشد، ضابطهٔ تابع در همسایگی $X_۰$ به صورت $\sqrt{۴ - x^۲ - y^۲}$ است که تابعی پیوسته است. اگر $X_۰$ خارج C باشد، ضابطهٔ تابع صفر است، که باز هم پیوسته است. اما اگر $X_۰$ بر C قرار داشته باشد، یعنی $x_۰^۲ + y_۰^۲ = ۴$، آنگاه با فرض $\theta_۰ = \arctan(y_۰/x_۰)$ داریم

$$\begin{aligned}
۰ &\le \lim_{(x,y)\to(x_۰,y_۰)} f(x,y) = \lim_{(r,\theta)\to(۲,\theta_۰)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) \\
&= \lim_{(r,\theta)\to(۲,\theta_۰)} \sqrt{۴ - r^۲} = \lim_{r\to ۲}\sqrt{۴ - r^۲} = ۰ = f(x_۰, y_۰)
\end{aligned}$$

بنابراین f در این حالت نیز پیوسته است. در نتیجه، f بر کل $\mathbb{R}^۲$ پیوسته است.

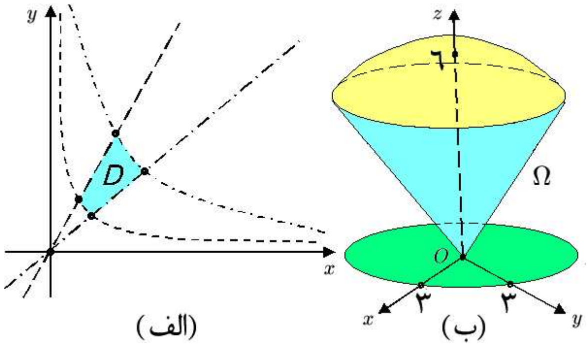
پاسخ مسألهٔ ۴) بنا به فرض، به ازای هر $t > ۰$ و هر (x,y) ای $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$. از طرفین این رابطه نسبت به t دو بار مشتق می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
&x f_x(tx,ty) + y f_y(tx,ty) = n t^{n-۱} f(x,y) \\
&x^۲ f_{xx}(tx,ty) + ۲xy f_{xy}(tx,ty) + y^۲ f_{yy}(tx,ty) = n(n-۱)t^{n-۲} f(x,y)
\end{aligned}$$

اکنون کافی است فرض شود $t = ۱$ و برهان تمام است.

پاسخ مسألهٔ ۵) با توجه به صورت مسأله و شکل ۲.۳۰—(الف)، ناحیهٔ D را به صورت

$$\begin{aligned}
D\ &:\ ۰ \le x\,,\ ۰ \le y\,,\ ۱ \le xy \le ۹\,,\ x \le y \le ۴x \\
&:\ ۰ \le x\,,\ ۰ \le y\,,\ ۱ \le xy \le ۹\,,\ ۱ \le \frac{y}{x} \le ۴
\end{aligned}$$



شکل ۲.۳۰: (الف) مسألهٔ ۵ از امتحان شانزدهم (ب) مسألهٔ ۶ از امتحان شانزدهم

می‌توان نوشت.

فرض کنیم $u = xy$ و $v = y/x$. در این صورت، تصویر D در صفحهٔ Ouv عبارت از $D' \,:\, ۱ \le u \le ۹\,,\ ۱ \le v \le ۴$ است. بعلاوه

$$J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = ۱ \div \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = ۱ \div \left\|\begin{matrix} y & x \\ \frac{-y}{x^۲} & \frac{۱}{x}\end{matrix}\right\| = ۱ \div \left|\frac{۲y}{x}\right| = \frac{۱}{۲|v|} = \frac{۱}{۲v}$$

بنابراین، انتگرال مورد نظر عبارت است از

$$\begin{aligned}\iint_D f\,dA &= \iint_D \left(\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy}\right)\,dxdy = \iint_{D'} (\sqrt{v}+\sqrt{u})\,\frac{۱}{۲v}\,dudv \\ &= \frac{۱}{۲}\left(\int_۱^۹ du\right)\left(\int_۱^۴ v^{-۱/۲}dv\right) + \frac{۱}{۲}\left(\int_۱^۹ u^{۱/۲}\,du\right)\left(\int_۱^۴ v^{-۱}dv\right) \\ &= \frac{۱}{۲}(۹)\,(۲) - \frac{۱}{۲}\left(\frac{۵۶}{۳}\right)(\ln ۴) = ۹ - \frac{۵۶}{۳}\ln ۲\end{aligned}$$

پاسخ مسألهٔ ۶) ناحیهٔ مورد نظر یک دوک به شکل ۲.۳۰—(ب) است. اما، Ω از بالا به نیم کرهٔ $z = \sqrt{۳۶ - x^۲ - y^۲}$ و از پائین به نیم مخروط $z = \sqrt{۳}\sqrt{x^۲+y^۲}$ محدود است. بنابراین می‌توان نوشت

$$\Omega \,:\, ۰ \le z\,,\ ۳(x^۲+y^۲) \le z^۲\,,\ x^۲+y^۲+z^۲ \le ۳۶$$

این ناحیه را به مختصات کروی می‌بریم:

$$\Omega' \quad : \quad ۰ \le \rho\cos\varphi\,,\ ۳\rho^۲\sin^۲\varphi \le \rho^۲\cos^۲\varphi\,,\ \rho^۲ \le ۳۶$$

$$: \quad \circ \le \cos\varphi\,,\ ۳\sin^۲\varphi \le \cos^۲\varphi\,,\ \circ \le \rho \le ۶$$
$$: \quad \circ \le \theta \le ۲\pi\,,\ \circ \le \varphi \le \frac{\pi}{۶}\,,\ \circ \le \rho \le ۶$$

توجه شود که مطابق فرض اولیه در تعریف مختصات کروی $\circ \le \varphi \le \pi$ و $\circ \le \rho$. به این ترتیب، گشتاور جرمی مورد نظر برابر است با

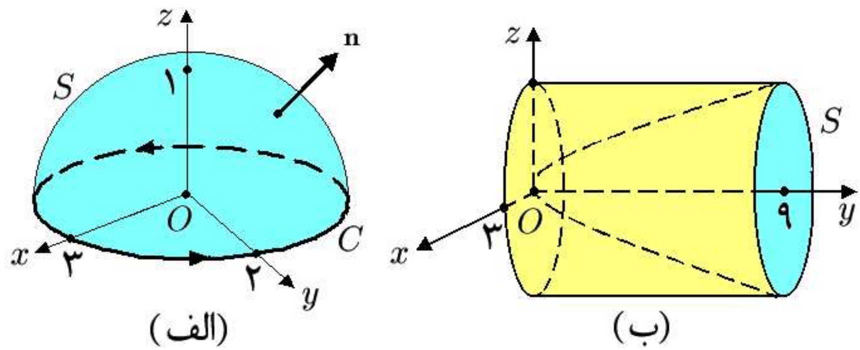
$$\begin{aligned}
M_\circ &= \iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}\,\delta(x,y,z)\,dV \\
&= \iiint\limits_{\Omega} e^{\left(x^۲+y^۲+z^۲\right)^۲}\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}\,dV \\
&= \iiint\limits_{\Omega'} e^{(\rho^۲)^۲}\rho\,\rho^۲\sin\varphi\,dV = \int_\circ^{۲\pi}\int_\circ^{\pi/۶}\int_\circ^{۳} e^{\rho^۴}\rho^۳\sin\varphi\,d\rho d\phi d\theta \\
&= \frac{۱}{۴}\left(\int_\circ^{۲\pi} d\theta\right)\left(\int_\circ^{\pi/۶}\sin\varphi\,d\varphi\right)\left(\int_\circ^{۶} e^{\rho^۴}\rho^۳\,d\rho\right) \\
&= \frac{۱}{۴}\Big[\theta\Big]_\circ^{۲\pi}\Big[-\cos\varphi\Big]_\circ^{\pi/۶}\left[\frac{۱}{۴}\rho^۴\right]_\circ^{۶} = \frac{\pi}{۴}(۲-\sqrt{۳})(e^{۸۱}-۱)
\end{aligned}$$

پاسخ مسألهٔ ۷) از قضیهٔ استوکس استفاده می‌کنیم. برای این منظور بایستی لبهٔ S را به صورت سازگار با S جهتدار نمود. به شکل ۳۱.۲—(الف) توجه شود. بنابراین، باید جهت منحنی C لبهٔ S به صورت نشان داده شده در شکل ۳۱.۲—(الف) باشد. این منحنی فصل مشترک صفحهٔ $z=\circ$ و بیضیگون $۴x^۲+۹y^۲+۳۶z^۲=۳۶$ است. یعنی $C\ :\ ۴x^۲+۹y^۲=۳۶\,,\ z=\circ$ یا $C\ :\ \frac{x^۲}{۹}+\frac{y^۲}{۴}=۱\,,\ z=\circ$. این منحنی را به صورت $C\ :\ \mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(۳\cos t, ۲\sin t, \circ)}\,;\ \circ\le t\le ۲\pi$ پارامتره می‌کنیم. بنابراین،

$$\iint\limits_{(S)} \mathrm{Curl}(\mathbf{F})\bullet\mathbf{n}\,d\sigma \quad = \quad \oint_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$$

اما چون C تماماً در صفحهٔ Oxy قرار دارد. انتگرال خط بالا عملاً بر منحنی $C\ :\ \mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(۳\cos t, ۲\sin t, \circ)}\,;\ \circ\le t\le ۲\pi$ محاسبه می‌شود و بعلاوه بجای $\mathbf{F}$ از تحدید آن بر صفحهٔ Oxy می‌توان استفاده نمود. یعنی از $\bar{\mathbf{F}}(x,y)=\overrightarrow{(y,x^۲)}$. بنابراین، انتگرال مورد نظر برابر است با

$$\iint\limits_{(S)} \mathrm{Curl}(\mathbf{F})\bullet\mathbf{n}\,d\sigma \quad = \quad \oint_{\bar{C}} \bar{\mathbf{F}}\bullet d\mathbf{r}$$



شکل ۳۱.۲: (الف) مسألهٔ ۷ از امتحان شانزدهم (ب) مسألهٔ ۸ از امتحان شانزدهم

که تمام شرایط قضیهٔ گرین در این حالت برقرار است. در واقع منحنی $\bar{C}$ یک منحنی ژردان است که لبهٔ ناحیهٔ $D\ :\ \frac{x^۲}{۹}+\frac{y^۲}{۴}\leq ۱$ است. بنابراین، مطابق قضیهٔ گرین داریم

$$\iint\limits_{(S)} \mathrm{Curl}(\mathbf{F})\bullet\mathbf{n}\,d\sigma = \iint\limits_{D}\left(\frac{\partial(x^۲)}{\partial x}-\frac{\partial(y)}{\partial y}\right)dA = \iint\limits_{D}(۲x-۱)\,dA$$

$$\overset{(۱)}{=}\ \iint\limits_{D'}(۶r\cos\theta-۱)\,۶r\,dA' = ۶\int_۰^{۲\pi}\left[۲r^۳\cos\theta-\frac{r^۲}{۲}\right]_۰^۱ d\theta$$

$$= ۶\int_۰^{۲\pi}\left(۲\cos\theta-\frac{۱}{۲}\right)d\theta = ۶\left[۲\sin\theta-\frac{۱}{۲}\theta\right]_۰^{۲\pi} = -۶\pi$$

توضیح اینکه در (۱) از تغییر متغیر $x=۳r\cos\theta$ و $y=۲r\sin\theta$ استفاده نموده‌ایم. به این ترتیب

$$J=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = |\begin{vmatrix} ۳\cos\theta & ۲\sin\theta \\ -۳r\sin\theta & ۲r\cos\theta \end{vmatrix}| = ۶r$$

و D' تصویر D در صفحهٔ $Or\theta$ عبارت است از $D'\ :\ ۰\leq\theta\leq ۲\pi\,,\ ۰\leq r\leq ۱$.

پاسخ مسألهٔ ۸) ابتدا رویهٔ S به شکل ۳۱.۲–(ب) ترسیم می‌کنیم. روشن است که اگر درون S را Ω بنامیم، در این صورت Ω در راستای محور y ها است و برای تعیین حدود آن بهتر است آن را بر صفحهٔ Oxz تصویر کنیم. برای این منظور معادلات استوانه و سهمیگون را در یک دستگاه حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} y=x^۲+z^۲ \\ x^۲+z^۲=۹ \end{cases} \Rightarrow\ y=۹\ \Rightarrow\ x^۲+z^۲=۹$$

بنابراین، تصویر Ω بر صفحهٔ Oxz عبارت است از قرص $x^۲ + z^۲ \leq ۹$ و می‌توان نوشت

$$\Omega\ :\ x^۲ + z^۲ \leq ۹\,,\ ۰ \leq y \leq x^۲ + z^۲$$

به این ترتیب، به کمک قضیهٔ دیورژانس می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}
\underset{(S)}{\oiint} \mathrm{div}\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, d\sigma &= \underset{\Omega}{\iiint} \mathrm{div}(\mathbf{F})\, dV \\
&= \underset{\Omega}{\iiint} \left(\frac{\partial(xz^۲)}{\partial x} + \frac{\partial(yx^۲)}{\partial y} + \frac{\partial(-۲yz)}{\partial a}\right) dV \\
&= \underset{\Omega}{\iiint} \left(z^۲ + x^۲ - ۲y\right)\, dV
\end{aligned}$$

در ادامه از مختصات استوانه‌ای در راستای محور y استفاده می‌کنیم. یعنی، فرض می‌کنیم: $x = r\cos\theta$، $z = r\sin\theta$ و $y = y$. در این صورت ژاکوبی تبدیل $J = r$ است و تصویر Ω در فضای $Oyr\theta$ عبارت است از

$$\Omega'\ :\ r^۲ \leq ۹\,,\ ۰ \leq y \leq r^۲\ \ :\ ۰ \leq \theta \leq ۲\pi\,,\ ۰ \leq r \leq ۳\,,\ ۰ \leq y \leq r^۲$$

بنابراین، داریم

$$\begin{aligned}
\underset{(S)}{\oiint} \mathrm{div}\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, d\sigma = \underset{\Omega}{\iiint} \left(z^۲ + x^۲ - ۲y\right)\, dV = \underset{\Omega'}{\iiint} \left(r^۲ - ۲y\right)\, r\, dV' \\
= \int_۰^{۲\pi} \left[\int_۰^۳ \left[\int_۰^{r^۲} (r^۲ - ۲ry)\, dy\right] dr\right] d\theta \\
= \int_۰^{۲\pi} \left[\int_۰^۳ \left[r^۲y - ry^۲\right]_۰^{r^۲} dr\right] d\theta = \int_۰^{۲\pi} \left[\int_۰^۳ \left(r^۴ - r^۵\right)\, dr\right] d\theta \\
= \int_۰^{۲\pi} \left[\frac{r^۵}{۵} - \frac{r^٦}{٦}\right]_۰^۳ d\theta = \int_۰^{۲\pi} -\frac{۳٦}{۱۰}\, d\theta = -\frac{۳٦}{۵}\pi
\end{aligned}$$

۱۷.۲ امتحان هفدهم

صورت مسایل

۱) نشان دهید که منحنی $\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{\left(3t^2 - 9t, 3t - 3t^2, 2t^2 - 3t + 5\right)}$ مسطحه است و سپس معادلهٔ صفحه‌ای که منحنی بر آن قرار دارد را بیابید.

۲) فرض کنید $w = f(x,y)$ تابعی مشتق‌پذیر باشد، $x = u + v$ و $y = uv^2$. در این صورت $\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}$ را محاسبه کنید.

۳) نشان دهید که تابع $f(x,y) = \begin{cases} x & |x| \leq |y| \text{ اگر } \\ -x & |x| > |y| \text{ اگر } \end{cases}$ در مبداء پیوسته است و مشتقات جزئی آن نیز در مبداء وجود دارند، در حالی که این تابع در مبداء مشتقپذیر نیست.

۴) اکسترمومهای موضعی تابع $f(x,y) = xy\ln(x^2 + y^2)$ را بیابید.

۵) فرض کنید D ناحیهٔ محدود به چهار سهمی $2x^2 = \pi y$، $x^2 = \pi y$، $2y^2 = x$ و $y^2 = x$ است و چگالی نقطهٔ به مختصات (x,y) از D برابر $\dfrac{\sin(xy)}{y}$ می‌باشد. گشتاور D حول محور y ها را محاسبه کنید.

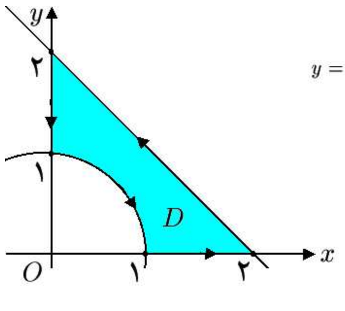
٦) قضیهٔ گرین را برای میدان برداری $\mathbf{F}(x,y) = \overrightarrow{\left(-y^3, x^3\right)}$ و منحنی نشان داده شده در شکل ۳۲.۲—(الف) تحقیق کنید.

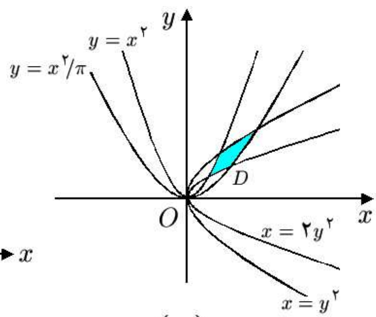
۷) فرض کنید $\mathbf{F}(x,y,z) = \overrightarrow{\left(x^3 - y^4 + z^5, y^3 - z^4 + x^5, z^3 - x^4 + y^5\right)}$ و S سطح خارجی $\Omega : |x| + |y| + |z| \leq 1$ باشد. انتگرال $\mathbf{F}$ بر S را محاسبه کنید.

۸) فرض کنید S قسمتی از استوانهٔ $x^2 + y^2 = a^2$ است که به صفحات $z = 0$ و $z = a$ محدود شده است و $\mathbf{n}$ بردار یکهٔ قائم بر سطح است که رو به خارج از آن دارد. قضیهٔ استوکس را برای میدان برداری

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \overrightarrow{\left(2yz, 2 - x + 3y, x^2 + z\right)}$$

و رویهٔ S تحقیق کنید.





شکل ۳۲.۲: (الف) مسألهٔ ٦ از امتحان هفدهم (ب) مسألهٔ ۴ از امتحان هفدهم

حل مسایل

پاسخ مسألهٔ ۱) کافی است نشان داده شود که تاب منحنی صفر است، برای این منظور نیز کافی است نشان داده شود که $\mathbf{r}'''(t)$ صفر است. اما چنانچه لازم بدانیم معادلهٔ صفحه را بدست بیاوریم، کافی است به روش زیر عمل کنیم:

$$\begin{cases} x = ۳t^۲ - ۹t^۲ \\ y = ۳t^۲ - ۳t^۲ \\ z = ۲t^۲ - ۳t + ۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + ۳y = -٦t^۲ \\ y + z = ۵ - t^۲ \end{cases} \Rightarrow x = ۳۰ + ۳y + ٦z$$

حل مسألهٔ ۲) به کمک قاعدهٔ زنجیره‌ای مشتق داریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial^۲ w}{\partial u \partial v} &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + ۲uv\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + ۲v\frac{\partial f}{\partial y} + ۲uv\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ &= \frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲} + v(v + ۲u)\frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y} + ۲uv^۳\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲} + ۲v\frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

پاسخ مسألهٔ ۳) باید اثبات گردد که

$$\forall \varepsilon\, \exists \delta\, \forall (x,y) \left(\|\overrightarrow{(x,y)} - \overrightarrow{(۰,۰)}\| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - f(۰,۰)| < \varepsilon\right)$$

اگر $\delta > \sqrt{x^۲ + y^۲} = \|(x,y) - (۰,۰)\|$، آنگاه $|x| < \delta$، $|y| < \delta$ و بنابراین

$$|f(x,y) - f(۰,۰)| = |\pm x - ۰| = |x| < \delta$$

پس با فرض $\delta = \varepsilon$ به پیوستگی f در مبداء پی می‌بریم. از طرفی

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } |x| < |y| \\ -۱ & \text{اگر } |x| > |y| \end{cases}$$

و در $(x,y) = (۰,۰)$، مطابق تعریف داریم

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(۰,۰)} = \lim_{x \longrightarrow ۰} \frac{f(x,۰) - f(۰,۰)}{x - ۰} = \lim_{x \longrightarrow ۰} \frac{-x - ۰}{x} = -۱$$

زیرا در این حالت $|x| > |y| = ۰$، به صورت مشابه

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(۰,۰)} = \lim_{y \longrightarrow ۰} \frac{f(۰,y) - f(۰,۰)}{y - ۰} = \lim_{y \longrightarrow ۰} \frac{۰ - ۰}{y} = ۰$$

در حالی که f در $(۰,۰)$ مشتق‌پذیر نیست. زیرا (فرض خلف) اگر $f'(۰,۰) = \overrightarrow{(a,b)}$، آنگاه مطابق تعریف

$$\lim_{(x,y) \longrightarrow (۰,۰)} \frac{\left| f(x,y) - f(۰,۰) - \overrightarrow{(a,b)} \bullet \left(\overrightarrow{(x,y)} - \overrightarrow{(۰,۰)} \right) \right|}{\|\overrightarrow{(x,y)} - \overrightarrow{(۰,۰)}\|} = ۰$$

چنانچه مسیر $\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(t,۰)}$ را بگیریم، خواهیم داشت

$$\lim_{t \longrightarrow ۰} \frac{|-t - at|}{|t|} = ۰ \implies |a + ۱| = ۰ \implies a = -۱$$

و اگر مسیر $\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(۰,t)}$ را بگیریم، خواهیم داشت

$$\lim_{t \longrightarrow ۰} \frac{|۰ - bt|}{|t|} = ۰ \implies |b| = ۰ \implies b = ۰$$

در حالی که با انتخاب مسیر $\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(t,۲t)}$، داریم

$$\lim_{t \longrightarrow ۰} \frac{|t - at - ۲bt|}{(a + ۴b^۲)\,|t|} = ۰ \implies |۱ - a - ۲b| = ۰ \implies a + ۲b = ۱$$

در نتیجه $۱ = -۲$. این تناقض به معنی عدم درستی فرض مشتقپذیری f در نقطهٔ $(۰, ۰)$ است.

پاسخ مسألهٔ ۴) ابتدا نقاط تکین تابع f را مشخص می‌کنیم

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = ۰ \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \ln\left(x^۲ + y^۲\right) + \dfrac{۲x^۲y}{x^۲ + y^۲} = ۰ \quad (۱) \\ \\ x \ln\left(x^۲ + y^۲\right) + \dfrac{۲xy^۲}{x^۲ + y^۲} = ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow y^۲ \ln\left(x^۲ + y^۲\right) = x^۲ \ln\left(x^۲ + y^۲\right) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \ln\left(x^۲ + y^۲\right) = ۰ \\ y^۲ = x^۲ \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^۲ + y^۲ = ۱ \\ y^۲ = x^۲ \end{array}\right. \overset{(۱)}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^۲ + y^۲ = ۱ \\ x^۲y = ۰ \end{cases} \\ \begin{cases} y = \pm x \\ x\big(\ln(۲x^۲) + ۱\big) = ۰ \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = ۰ \\ y = \pm ۱ \end{cases} \\ \begin{cases} y = ۰ \\ x = \pm ۱ \end{cases} \\ \begin{cases} y = \pm x \\ x = \pm ۱/\sqrt{۲e} \end{cases} \end{array}\right.$$

پس جمعاً تابع f دارای هشت نقطهٔ تکین است:

$$X_۱ = (۰, ۱) \qquad X_۲ = (۰, -۱) \qquad X_۳ = (۱, ۰)$$

$$X_۴ = (-۱, ۰) \qquad X_۵ = \left(\frac{۱}{\sqrt{۲e}}, \frac{۱}{\sqrt{۲e}}\right) \qquad X_۶ = \left(\frac{۱}{\sqrt{۲e}}, \frac{-۱}{\sqrt{۲e}}\right)$$

$$X_۷ = \left(\frac{-۱}{\sqrt{۲e}}, \frac{۱}{\sqrt{۲e}}\right) \qquad X_۸ = \left(\frac{-۱}{\sqrt{۲e}}, \frac{-۱}{\sqrt{۲e}}\right)$$

f در چهارتای اول صفر است و در چهارتای دوم برابر $\pm\dfrac{۱}{۲e} \ln\left(\dfrac{۱}{e}\right) = \dfrac{\pm ۱}{۲e}$ می‌باشد.
از طرفی

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲} = \frac{۲xy}{x^۲ + y^۲} - \frac{۴xy^۳}{\left(x^۲ + y^۲\right)^۲} \\ B &= \frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y} = \ln\left(x^۲ + y^۲\right) + ۲\,\frac{x^۴ + y^۴}{(x^۲ + y^۲)^۲} \\ C &= \frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲} = \frac{۲xy}{x^۲ + y^۲} - \frac{۴x^۳y}{(x^۲ + y^۲)^۲} \qquad D = AC - B^۲ \end{aligned}$$

	A	B	C	D	نتیجه
$X_۱$	۰	۲	۰	-۴	نقطهٔ زینی
$X_۲$	۰	۲	۰	-۴	نقطهٔ زینی
$X_۳$	۰	۲	۰	-۴	نقطهٔ زینی
$X_۴$	۰	۲	۰	-۴	نقطهٔ زینی
$X_۵$	۲	۰	۲	۴	مینیمم موضعی
$X_٦$	-۲	۰	-۲	۴	ماکزیموم موضعی
$X_۷$	-۲	۰	-۲	۴	ماکزیموم موضعی
$X_۸$	۲	۰	۲	۴	مینیمم موضعی

پس f دارای دو نقطهٔ ماکزیموم موضعی در نقاط $X_٦$ و $X_۷$ است و مقدار f در این نقاط برابر $۱/۲e$ است. همچنین، f دارای دو نقطهٔ مینیموم موضعی در نقاط $X_۵$ و $X_۸$ است و مقدار f در این نقاط برابر $-۱/۲e$ است.

حل مسألهٔ ۵) ملاحظه می‌شود که در این مسأله

$$D\ :\ x^۲ \leq \pi y \leq ۲x^۲, y^۲ \leq x \leq ۲y^۲$$

به بیان دیگر $D\ :\ ۱ \leq \pi\frac{y}{x^۲} \leq ۲, ۱ \leq \frac{x}{y^۲} \leq ۲$. به شکل ۳۲.۲—(ب) توجه شود. بنابراین، اگر فرض کنیم $u = \frac{\pi y}{x^۲}$ و $v = \frac{x}{y^۲}$، در این صورت تصویر D در صفحهٔ Ouv عبارت است از مربع $D'\ :\ ۱ \leq u \leq ۲, ۱ \leq v \leq ۲$. بعلاوه $uv = \frac{\pi}{xy}$ و

$$J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = ۱ \div \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = ۱ \div \left\| \begin{matrix} -۲\pi y^۲/x^۳ & ۱/y^۲ \\ \pi/x^۲ & -۲x/y^۳ \end{matrix} \right\| = \frac{x^۲y^۲}{۳\pi} = \frac{\pi}{۳u^۲v^۲}$$

و بنابراین

$$\begin{aligned} I_x &= \iint\limits_D x^۲\delta\, dA = \iint\limits_D x^۲\frac{\sin(xy)}{y}\, dA = \iint\limits_{D'} \frac{\pi}{u}\sin\left(\frac{\pi}{uv}\right)\frac{\pi}{۳u^۲v^۲}\, dA' \\ &= \frac{\pi^۲}{۳}\int_۱^۲ \left[\int_۱^۲ \frac{۱}{u^۳v^۲}\sin\left(\frac{\pi}{uv}\right)\, du\right] dv \\ &= \frac{۱}{۳}\int_۱^۲ \left[-\sin\left(\frac{\pi}{uv}\right) + \frac{\pi}{uv}\cos\left(\frac{\pi}{uv}\right)\right]_۱^۲ dv \\ &= \frac{۱}{۳}\int_۱^۲ \left\{\frac{\pi}{۲v}\cos\left(\frac{\pi}{۲v}\right) - \frac{۱}{v}\sin\left(\frac{\pi}{۲v}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{v}\right) - \frac{\pi}{v}\cos\left(\frac{\pi}{v}\right)\right\} dv \\ &= \frac{۱}{۳}\left[-\sin\left(\frac{\pi}{۲v}\right) + v\sin\left(\frac{\pi}{v}\right) + \pi\ln\left(\frac{\pi}{۲v}\right) + ۳\ln(v)\right]_۱^۲ = ۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۳} \end{aligned}$$

حل مسألهٔ ٦) الف) به کمک قضیه. درون منحنی C نشان داده شده در شکل ۲.۳۲—(الف) عبارت است از $D = D_1 - D_2$ که در آن $D_1 : 0 \le x \le 2 , \; 0 \le y \le 2 - x$ و $D_2 : x^2 + y^2 \le 1 , \; 0 \le x , \; 0 \le y$. در نتیجه

$$\begin{aligned}
\iint_D (Q_x - P_y)\, dA &= \iint_D 3\left(x^2 + y^2\right) dA \\
&= 3\iint_{D_1}\left(x^2 + y^2\right) dA - 3\iint_{D_2}\left(x^2 + y^2\right) dA \\
&= 3\int_0^2 \left[\int_0^{2-x} \left(x^2 + y^2\right) dy\right] dx - 3\int_0^1 \left[\int_0^{\pi/2} r^3\, dr\right] d\theta \\
&= \int_0^2 \left[y^3 + 3yx^2\right]_0^{2-x} dx - 3\Big[\theta\Big]_0^{\pi/2} \times \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 \\
&= 4\int_0^2 \left(2 - 3x + 3x^2 - x^3\right) dx - \frac{3\pi}{8} = 8 - \frac{3\pi}{8}
\end{aligned}$$

ب) به روش مستقیم. با توجه به شکل ۲.۳۲—(الف) ملاحظه می‌شود که منحنی $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ از چهار قسمت تشکیل می‌گردد:

$$C_1 : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 0 \le x \,, \; 0 \le y \\ \text{باجهت عکس مثلثاتی} \end{cases} \quad : \mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(\sin t, \cos t)} \;\; ; \;\; 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

$$C_2 : \mathbf{r}(t) = (1 - t)\overrightarrow{(1, 0)} + t\overrightarrow{(2, 0)} = \overrightarrow{(1 + t, 0)} \;\; ; \;\; 0 \le t \le 1$$

$$C_3 : \mathbf{r}(t) = (1 - t)\overrightarrow{(2, 0)} + t\overrightarrow{(0, 2)} = \overrightarrow{(2 - 2t, 2t)} \;\; ; \;\; 0 \le t \le 1$$

$$C_4 : \mathbf{r}(t) = (1 - t)\overrightarrow{(0, 2)} + t\overrightarrow{(0, 1)} = \overrightarrow{(0, 2 - t)} \;\; ; \;\; 0 \le t \le 1$$

در نتیجه، داریم $\oint_C P\, dx + Q\, dy = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$ که در آن

$$\begin{aligned}
I_1 &= \oint_{C_1} P\, dx + Q\, dy = \int_0^{\pi/2} \mathbf{F}(\sin t, \cos t) \bullet \overrightarrow{(\cos t, -\sin t)}\, dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \overrightarrow{(-\cos^3 t, \sin^3 t)} \bullet \overrightarrow{(\cos t, -\sin t)}\, dt \\
&= -\int_0^{\pi/2} (\sin^4 t + \cos^4 t)\, dt = -\int_0^{\pi/2} (1 - 2\sin^2 t \cos^2 t)\, dt \\
&= -\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} (3 + \cos(4t))\, dt = -\frac{1}{4}\left[3t + \frac{1}{4}\sin(4t)\right]_0^{\pi/2} = -\frac{3\pi}{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{۲} &= \oint_{C_{۲}} P\,dx + Q\,dy = \int_{۰}^{۱} \mathbf{F}(۱+t,۰)\bullet\overrightarrow{(۱,۰)}\,dt \\
&= \int_{۰}^{۱} \overrightarrow{\left(۰,(۱+t)^{۳}\right)}\bullet\overrightarrow{(۱,۰)}\,dt = ۰ \\
I_{۳} &= \oint_{C_{۳}} P\,dx + Q\,dy = \int_{۰}^{۱} \mathbf{F}(۲-۲t,۲t)\bullet\overrightarrow{(-۲,۲)}\,dt \\
&= \int_{۰}^{۱} \overrightarrow{\left(-۸t^{۳},۸(۱-t)^{۳}\right)}\bullet\overrightarrow{(-۲,۲)}\,dt \\
&= ۱۶\int_{۰}^{۱} \left(۱-۳t+۳t^{۲}\right)dt = ۸ \\
I_{۴} &= \oint_{C_{۳}} P\,dx + Q\,dy = \int_{۰}^{۱} \mathbf{F}(۰,۲-t)\bullet\overrightarrow{(۰,-۱)}\,dt \\
&= \int_{۰}^{۱} \overrightarrow{\left(-(۲-t)^{۳},۰\right)}\bullet\overrightarrow{(۰,-۱)}\,dt = ۰
\end{aligned}$$

بنابراین

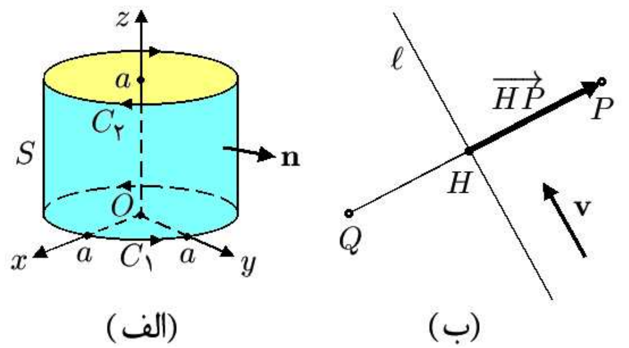
$$\oint_{C} P\,dx + Q\,dy = I_{۱}+I_{۲}+I_{۳}+I_{۴} = ۸ - \frac{۳\pi}{۸}$$

حل مسألهٔ ۷) از قضیهٔ دیورژانس استفاده می‌کنیم. چون Ω نسبت به مبدأ متقارن است، کافی است بر قسمتی از آن که در یک هشتم اول قرار دارد انتگرال بگیریم و سپس پاسخ را در هشت ضرب کنیم. اما این یک هشتم ناحیه عبارت است از

$$\begin{aligned}
\Omega_{۱} \quad &: \quad ۰\le x\,,\ ۰\le y\,,\ ۰\le z\,,\ x+y+z\le ۱ \\
&: \quad ۰\le x\le ۱\,,\ ۰\le y\le ۱-x\,,\ ۰\le z\le ۱-x-y
\end{aligned}$$

بنابراین، داریم

$$\begin{aligned}
\oiint_{(S)} \mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{F})\,dV = \iiint_{\Omega} ۳\left(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}\right)dV \\
&= ۲۴\iiint_{\Omega_{۱}} \left(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}\right)dV \overset{(۱)}{=} ۷۲\iiint_{\Omega_{۱}} x^{۲}\,dV \\
&= ۷۲\int_{۰}^{۱}\left[\int_{۰}^{۱-x}\left[\int_{۰}^{۱-x-y} x^{۲}\,dz\right]dy\right]dx
\end{aligned}$$



شکل ۳۳.۲: (الف) مسألهٔ ۸ از امتحان هفدهم (ب) مسألهٔ ۲ از امتحان هجدهم

$$= \quad ۷۲\int_{\circ}^{۱}\left[\int_{\circ}^{۱-x} x^{۲}\,(۱-x-y)\,dy\right]dx$$
$$= \quad -۳۶\int_{\circ}^{۱} x^{۲}\,(۱-x)^{۲}\,dx = \frac{۶}{۵}$$

توضیح اینکه اگر در عبارت سمت چپ تساوی (۱) x، y و یا z را با هم عوض کنیم، هیچ تغییری ایجاد نمی‌شود. بنابراین، انتگرال $x^{۲}$، $y^{۲}$ و $z^{۲}$ بر $\Omega_۱$ با هم برابرند. پس کافی است یکی را محاسبه نمود و حاصل را در سه ضرب کرد.

پاسخ مسألهٔ ۸) الف) به روش مستقیم. با توجه به شکل ۳۳.۲—(الف) لبهٔ S عبارت است از $C = C_۱ \cup C_۲$ که در آن

$$C_۱ \quad : \quad x^{۲}+y^{۲}=a^{۲}\,,\; z=\circ\,,\; -\mathbf{k} \text{ با جهت سازگار با }$$
$$C_۲ \quad : \quad x^{۲}+y^{۲}=a^{۲}\,,\; z=a\,,\; \mathbf{k} \text{ با جهت سازگار با }$$

آنها را به صورت

$$C_۱ \quad : \quad \mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(a\cos t, u\sin t, \circ)} \;\; ; \;\; \circ \le t \le ۲\pi$$
$$C_۲ \quad : \quad \mathbf{r}(t)=\overrightarrow{(a\sin t, u\cos t, a)} \;\; ; \;\; \circ \le t \le ۲\pi$$

پارامتره می‌کنیم. در نتیجه

$$\oint_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = \int_{C_۱}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} + \int_{C_۲}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\circ}^{۲\pi} \overrightarrow{\left(\circ, ۲ - a\cos t + ۳a\sin t, a^{۲}\cos t\right)} \bullet \overrightarrow{(-a\sin t, a\cos t, \circ)}\, dt \\
&\quad + \int_{\circ}^{۲\pi} \overrightarrow{\left(۲a^{۲}\cos t, ۲ - a\sin t + ۳a\cos t, a^{۲}\sin^{۲} t + a\right)} \\
&\qquad \bullet \overrightarrow{(a\cos t, -a\sin t, \circ)}\, dt \\
&= \int_{\circ}^{\pi} \left\{۲a\cos t - ۲a\sin t + ۲a^{۳}\cos^{۲} t\right\} dt = ۲\pi a^{۳}
\end{aligned}$$

ب) به کمک قضیهٔ استوکس. با توجه به شکل ۳۳.۲—(الف) رویهٔ S عبارت است از $S\,:\,x^{۲}+y^{۲}=a^{۲}\,,\ \circ\le z\le a$. این رویه را به کمک مختصات استوانه‌ای به صورت زیر پارامتره می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
S \quad &: \quad x = a\cos u\,,\ y = a\sin u\,,\ z = v \ ;\ (u,v)\in D \\
&: \quad \mathbf{r}(u,v) = \overrightarrow{(a\cos u, a\sin u, v)} \ ;\ (u,v)\in D
\end{aligned}$$

که در آن $D\,:\,\circ\le u\le ۲\pi\,,\ \circ\le v\le a$. در این صورت

$$\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a\sin u & a\cos u & \circ \\ \circ & \circ & ۱ \end{vmatrix} = \overrightarrow{(a\cos u, a\sin u, \circ)}$$

$$\mathbf{n}\,d\sigma = \left(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\right) dudv = \overrightarrow{(a\cos u, a\sin u, \circ)}\, dudv$$

از طرفی

$$\operatorname{Curl}(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ ۲yz & ۲ - x + ۳y & x^{۲} + z \end{vmatrix} = \overrightarrow{(\circ, ۲y - ۲x, -۱ - ۲z)}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
&\iint_{(S)} \operatorname{Curl}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}\, d\sigma = \\
&= \iint_{D} \overrightarrow{(\circ, ۲a\sin u - ۲a\cos u, -۱ - ۲v)} \bullet \overrightarrow{(a\cos u, a\sin u, \circ)}\, dudv \\
&= \iint_{D} \left(۲a^{۲}\sin^{۲} u - ۲a^{۲}\cos u\sin u\right) dudv \\
&= ۲a^{۲}\left(\int_{\circ}^{a} dv\right)\left(\int_{\circ}^{۲\pi} \sin^{۲} u - \cos u\sin u\, du\right) = ۲a^{۳}\pi
\end{aligned}$$

۱۸.۲ امتحان هجدهم

صورت مسایل

۱) مقدار دترمینان زیر را بازاء هر $n \in \mathbb{N}$ ای بدست آورید:

$$a_n := \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & \cdots & n \\ n+۱ & n+۲ & \cdots & ۲n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n\left(n-۱\right)+۱ & n\left(n-۱\right)+۲ & \cdots & n^۲ \end{vmatrix}$$

۲) قرینهٔ نقطهٔ $(۲,-۵,۷)$ نسبت به خط $z = \frac{y-۱}{۲} = \frac{x+۳}{۲}$ را بیابید.

۳) با فرض این که $f(x,y) = \begin{cases} y + x\sin\left(۱/y\right) & y \neq ۰ \\ ۰ & y = ۰ \end{cases}$ نشان دهید که

الف) حد $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(۰,۰)} f(x,y)$ وجود دارد؛

ب) حد $\lim\limits_{y\longrightarrow ۰}\left(\lim\limits_{x\longrightarrow ۰} f(x,y)\right)$ وجود دارد؛ در حالی که

ج) حد $\lim\limits_{x\longrightarrow ۰}\left(\lim\limits_{y\longrightarrow ۰} f(x,y)\right)$ وجود ندارد.

۴) با فرض $u = x^n f\left(\frac{y}{x^\alpha}, \frac{z}{x^\beta}\right)$، ثابت کنید $xu_x + \alpha y u_y + \beta z u_z = nu$.

۵) مقدار هر یک از انتگرالهای زیر را محاسبه کنید:

الف) $\displaystyle\int_۰^۲ \left[\int_x^۲ [x+y]\, dy\right] dx$ ب) $\displaystyle\int_۰^۱ \left[\int_y^{\sqrt[۳]{y}} \sin\left(x^۲\right)\, dy\right] dx$

٦) متوسط تابع $f = x^۲ + y^۲ + z^۲$ بر مجموعهٔ $\Omega \,:\, x^۲ + y^۲ + z^۲ \leq ۴z$ را محاسبه کنید.

۷) در صورتی که $C \,:\, \max\{|x|,|y|\} = a \,,\, z = ۱$ و نقطهٔ (x,y,z) از C دارای چگالی جرم $f = |xyz|$ باشد، گشتاور ماند C حول $z-$ محور را محاسبه کنید.

۸) از تابع $\mathbf{F} = \overrightarrow{(x-y+z, y-z+x, z-x+y)}$ بر سطح خارجی جسم

$$\Omega \,:\, |x-y+z| + |y-z+x| + |z-x+y| \leq ۱$$

انتگرال بگیرید.

۹) از میدان برداری $\mathbf{F} = \overrightarrow{(x, x+y, x+y+z)}$ بر منحنی زیر انتگرال بگیرید:

$$C \,:\, \mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(a\sin t, a\cos t, a\sin t + a\cos t)} \;\; ; \;\; ۰ \leq t \leq ۲\pi$$

حل مسایل

پاسخ مسألهٔ ۱) با محاسبهٔ مستقیم داریم

$$a_۱ = |۱| = ۱ \;\; , \;\; a_۲ = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{vmatrix} = -۲ \;\; , \;\; a_۳ = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۷ & ۸ & ۹ \end{vmatrix} = ۰$$

اگر $n \leq ۳$ و به جای ستون دوم، ستون دوم منحنی ستون اول و به جای ستون سوم، ستون سوم منحنی ستون اول را قرار داده‌ایم. نتیجه خواهیم گرفت

$$a_n = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & \cdots & n \\ n+۱ & ۱ & ۱ & \cdots & ۲n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n(n-۱)+۱ & ۱ & ۱ & \cdots & n^۲ \end{vmatrix} = ۰$$

بنابراین، در مجموع داریم

$$a_n = \begin{cases} ۱ & n = ۱ \text{ اگر} \\ -۲ & n = ۲ \text{ اگر} \\ ۰ & n \geq ۳ \text{ اگر} \end{cases}$$

پاسخ مسألهٔ ۲) ابتدا پای عمود H وارد از $P = (۲, -۵, ۷)$ بر خط داده شده ℓ را بدست می‌آوریم. برای این منظور خط ℓ را پارامتره می‌کنیم:

$$\frac{x+۳}{۲} = \frac{y-۱}{۲} = z = t \implies \begin{cases} x = ۲t - ۳ \\ y = ۲t + ۱ \\ z = t \end{cases}$$

بنابراین، می‌توان فرض نمود که $H = (۲t - ۳, ۲t + ۱, t)$. همان طور که در شکل ۳۳.۲—(ب) مشهود است بایستی $\overrightarrow{HP} = P - H = \overrightarrow{(۵ - ۲t, -۶ - ۲t, ۷ - t)}$ بر بردار $\mathbf{v} = \overrightarrow{(۲, ۲, ۱)}$ هادی خط ℓ عمود باشد:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{HP} \perp \ell \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{HP} \perp \mathbf{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{HP} \bullet \mathbf{v} = ۰ \\ &\Leftrightarrow \quad ۲\,(۵ - ۲t) + ۲\,(-۶ - ۲t) + ۱\,(۷ - t) = ۰ \\ &\Leftrightarrow \quad ۵ - ۹t = ۰ \Leftrightarrow t = \frac{۵}{۹} \end{aligned}$$

پس $H = \left(\frac{۳۵}{۹}, -\frac{۶۴}{۹}, \frac{۶۸}{۷}\right)$. اکنون با توجه به شکل ۳۳.۲—(ب) منعکس نقطهٔ P نسبت به خط ℓ عبارت است از:

$$Q = P - ۲\overrightarrow{HP} = ۲H - P = \left(\frac{۵۲}{۹}, -\frac{۳۸}{۹}, \frac{۷۳}{۹}\right)$$

پاسخ مسألهٔ ۳) **الف)** با توجه به اینکه

$$\left|y + x\sin\left(\frac{۱}{y}\right)\right| \leq |y| + |x|\left|\sin\left(\frac{۱}{y}\right)\right| \leq |y| + |x| < ۲\delta$$

بنابراین، کافی است فرض شود $\delta = \varepsilon/۲$ و $\|\overrightarrow{(x, y)} - \overrightarrow{(۰, ۰)}\| < \delta$. در این صورت خواهیم داشت $|f(x, y) - f(۰, ۰)| < \varepsilon$ و حکم الف نتیجه می‌گردد.

ب) با محاسبهٔ مستقیم مشاده می‌گردد که

$$\lim_{y\to ۰}\left(\lim_{x\to ۰} f(x, y)\right) = \lim_{y\to ۰}\left(\lim_{x\to ۰}\left(y + x\sin\left(\frac{۱}{y}\right)\right)\right) = \lim_{y\to ۰}(y + ۰) = ۰$$

ج) برای اثبات حکم (ج) دنبالهٔ $y_n := ۲/(۲n + ۱)\pi$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت

$$\begin{aligned} \lim_{n\longrightarrow\infty} f(x, y_n) \quad &= \quad \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{۲}{(۲n + ۱)\pi} + x\sin\left((۲n + ۱)\frac{\pi}{۲}\right)\right\} \\ &= \quad x\lim_{n\to\infty}(-۱)^n \end{aligned}$$

که وجود ندارد. بنابراین، حد $\lim\limits_{y\longrightarrow 0} f(x,y)$ برای x های مخالف صفر وجود ندارد و لذا حد (ج) نیز وجود ندارد.

پاسخ مسألهٔ ۴) با فرض $s = y/x^\alpha$ و $t = z/x^\beta$ و به کمک قائدهٔ زنجیره‌ای مشتق داریم $u = f(s,t)$ و

$$\begin{aligned}
\text{طرف اول} &= x\left\{nx^{n-1}f + x^n f_t.t_x + x^n f_s.s_x\right\} \\
&\quad +\alpha y x^n\left\{f_t.t_y + f_s.s_y\right\} + \beta z x^n\left\{f_t.t_z + f_s.s_z\right\} \\
&= x\left\{nx^{n-1}f + x^n f_t.(-\beta x^{-\beta}y) + x^n f_s.(-\alpha x^{-\alpha}z)\right\} \\
&\quad +\alpha y x^n\left\{0 + f_s.x^{-\alpha}\right\} + \beta z x^n\left\{f_t.x^{-\beta} + 0\right\} \\
&= nx^n f - f_t.\beta x^{n-\beta}y - f_s.\alpha x^{n-\alpha}z + f_s.\alpha x^{n-\alpha}y + f_t.\beta x^{n-\beta}z \\
&= nx^n f = nu
\end{aligned}$$

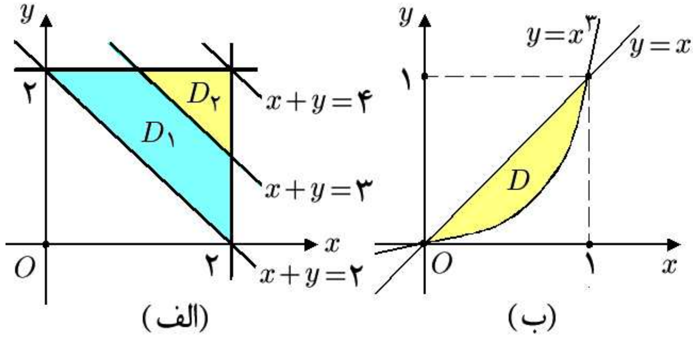
پاسخ مسألهٔ ۵) الف) به جهت اینکه تابع $[x+y]$ به ازای نقاط در نوار $n \le x+y < n+1$ مقدار n را اختیار می‌کند، مجموعهٔ D را به صورت $D = D_1 + D_2$ می‌نویسیم که در آن:

$$\begin{aligned}
D_1 &: \; 2 \le x+y \le 3 \,,\; 0 \le x \le 2 \,,\; 0 \le y \le 2 \\
D_2 &: \; 3 \le x+y \le 4 \,,\; 1 \le x \le 2 \,,\; 1 \le y \le 2
\end{aligned}$$

به شکل ۳۴.۲—(الف) توجه شود. لازم به ذکر است که $[x+y]$ بر کل D_1 برابر ۲ است به جز بر مناطقی از لبهٔ آن که چون این مجموعه مساحت نمی‌سازد، می‌توان فرض کرد $[x+y]$ بر کل D_1 برابر ۲ است. به همین ترتیب $[x+y]$ بر کل D_2 برابر ۳ است. به این ترتیب، داریم

$$\begin{aligned}
\int_0^2\left[\int_x^2 [x+y]\,dy\right]dx &= \iint\limits_D [x+y]\,dA = \iint\limits_{D_1} 2\,dA + \iint\limits_{D_2} 3\,dA \\
&= 2\,\mathrm{Area}(D_1) + 3\,\mathrm{Area}(D_2) = 2\,\mathrm{Area}(D_1\cup D_2) + \mathrm{Area}(D_2) \\
&= 2\times\frac{1}{2}\times 2\times 2 + \frac{1}{2}\times 1\times 1 = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}
\end{aligned}$$

ب) چنانچه حدود این انتگرال را باز نویسی کنیم، به $D \,:\, 0 \le y \le 1 \,,\, y \le x \le \sqrt[3]{y}$ می‌رسیم. به شکل ۳۴.۲—(ب) توجه شود. این مجموعه به شکل y—منظم است. آن



شکل ۳۴.۲: (الف) مسألهٔ ۵–(الف) از امتحان هجدهم (ب) مسألهٔ ۵–(ب) از امتحان هجدهم

را به صورت x–منظم باز نویسی می‌کنیم: $D\ :\ ۰ \le x \le ۱\,,\ x^۳ \le y \le x$. در نتیجه

$$\int_۰^۱ \left[\int_y^{\sqrt[۳]{y}} \sin(x^۲)\,dx\right] dy = \iint\limits_D \sin x^۲\,dx$$
$$= \int_۰^۱ \left[\int_{x^۳}^{x} \sin(x^۲)\,dy\right] dx = \int_۰^۱ \left(x - x^۳\right)\sin(x^۲)\,dx$$

با فرض $t = x^۲$ داریم

$$= \int_۰^۱ (۱-t)\sin t\frac{dt}{۲} = \frac{۱}{۲}\int_۰^۱ (t-۱)\,d\cos t$$
$$= \frac{۱}{۲}\Big[(t-۱)\cos t\Big]_۰^۱ - \frac{۱}{۲}\int_۰^۱ \cos t\,dt = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲}\sin t\Big|_۰^۱ = \frac{۱}{۲}(۱-\sin ۱)$$

پاسخ مسألهٔ ٦) مسأله را به مختصات کروی می‌بریم. در این صورت، تصویر Ω در فضای $O\rho\theta\varphi$ عبارت است از

$$\Omega'\ :\ \rho^۲ \le ۴\rho\cos\varphi\ :\ ۰ \le \rho \le ۴\cos\varphi\,,\ ۰ \le \cos\varphi$$
$$:\ ۰ \le \theta \le ۲\pi\,,\ ۰ \le \varphi \le \frac{\pi}{۲}\,,\ ۰ \le \rho \le ۴\cos\varphi$$

در نتیجه، متوسط تابع f برابر است با

$$\operatorname*{mean}_{\Omega} f = \frac{۱}{\mathrm{Vol}(\Omega)}\iiint\limits_\Omega f\,dV = \frac{۱}{\frac{۴}{۳}\pi \times ۲^۳}\iiint\limits_\Omega \{x^۲+y^۲+z^۲\}\,dV$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{۳}{۲۵\pi} \iiint\limits_{\Omega'} \rho^۲ \rho^۲ \sin\varphi \, dV \\
&= \frac{۳}{۲۵\pi} \left(\int_۰^{۲\pi} d\theta \right) \int_۰^{\pi/۲} \left[\int_۰^{۴\cos\varphi} \rho^۴ \sin\varphi \, d\varphi \right] d\varphi \\
&= \frac{۳}{۲^۴} \int_۰^{۲\pi} \frac{(۴\cos\varphi)^۵}{۵} \sin\varphi \, d\varphi = \frac{۳ \times ۲^٦}{۵} \int_۰^{۲\pi} \cos^۵\varphi \sin\varphi \, d\varphi \\
&= \frac{۳}{۵} ۲^٦ \left[-\frac{\cos^٦\varphi}{٦} \right]_۰^{\pi/۲} = \frac{۲^۵}{۵} = \frac{۳۲}{۵}
\end{aligned}
$$

پاسخ مسألهٔ ۷) منحنی C و چگالی نسبت به تغییر متغیر $x- \longleftarrow x$ یا $y- \longleftarrow y \longrightarrow -y$ پایدار است. لذا با فرض $x \leq ۰$، $y \leq ۰$ می‌توان مسأله را حل کرد و پاسخ را در چهار ضرب نمود. اما در این صورت

$$
C_{۱/۴} \;:\; ۰ \leq x \,,\; ۰ \leq y \,,\; \max\{x,y\} = a \,,\; z = ۱
$$

و می‌توان نوشت $C_{۱/۴} = C_۱ + C_۲$ که در آن

$$
\begin{aligned}
C_۱ \;&:\; ۰ \leq x \,,\; ۰ \leq y \,,\; x \leq y = a \,,\; z = ۱ \\
C_۱ \;&:\; ۰ \leq x \,,\; ۰ \leq y \,,\; y \leq x = a \,,\; z = ۱
\end{aligned}
$$

در نتیجه، داریم

$$
\begin{aligned}
I_z &= \int_C \left(x^۲ + y^۲\right) \delta \, ds = ۴ \int_{C_{۱/۴}} \left(x^۲ + y^۲\right) xyz ds = ۴ \int_{C_۱} + ۴ \int_{C_۲} \\
&= ۴ \int_۰^a \left(x^۲ + a^۲\right) xa ۱ \| \overrightarrow{(x, ۰, ۰)} \| dx \\
&\quad + ۴ \int_۰^a \left(a^۲ + y^۲\right) ay ۱ \| \overrightarrow{(۰, y, ۰)} \| dy \\
&= ۴a \int_۰^a \left(x^۲ + a^۲\right) x^۲ dx + ۴a \int_۰^a \left(y^۲ + a^۲\right) y^۲ dy \\
&= ۸a \int_۰^a \left(y^۲ + a^۲\right) y^۲ dy = ۸a \left[\frac{x^۵}{۵} + a^۲ \frac{x^۳}{۳} \right]_۰^a = \frac{۱۲۸}{۱۵} a^٦
\end{aligned}
$$

پاسخ مسأله ۸) از قضیهٔ دیورژانس استفاده می‌کنیم. داخل رویهٔ بستهٔ S در این مسأله

$$
\Omega \;:\; |x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| \leq ۱
$$

است و بعلاوه $\mathrm{div}(\mathbf{F}) = ۳$. در ادامه از تغییر متغیر خطی

$$u = x - y + z \ , \quad v = y - z + x \ , \quad w = z - x + y$$

استفاده می‌کنیم. بنابراین، داریم

$$J \;=\; \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = ۱ \div \left|\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\right| = ۱ \div \left\| \begin{matrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & -۱ \\ -۱ & ۱ & ۱ \end{matrix} \right\| = \frac{۱}{۴}$$

به علاوه تصویر Ω در uvw–فضا عبارت است از $\Omega' \ : \ |u| + |v| + |w| \leq ۱$. اما Ω' نسبت به مبداء متقارن است و لذا حجم آن هشت برابر حجم قسمتی از آن است که در یک هشتم اول قرار دارد. این مجموعه $\Omega_۱$ یک هرم قائم با ابعاد یک در uvw–فضا است. در نتیجه، داریم

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{div}(\mathbf{F})\, dV \;&=\; \iiint\limits_{\omega} ۳\, dV = ۳ \iiint\limits_{\Omega'} \frac{۱}{۴}\, dV' = \frac{۳}{۴}\mathrm{Vol}\,(\Omega') \\
&=\; ۸\frac{۳}{۴}\mathrm{Vol}\,(\Omega_۱) = ٦\mathrm{Vol}\,(\Omega_۱) = ٦ \times \frac{۱}{٦} \times ۱ \times ۱ = ۱
\end{aligned}$$

۱۹.۲ امتحان نوزدهم

صورت مسایل

۱) تنها به یکی از دو سؤال زیر پاسخ دهید: الف— اگر z تابعی از x و y بوده و u و v دو متغیر دیگر باشند به نحوی که $u = \ell x + my$ و $v = -mx + \ell y$ درستی رابطهٔ زیر را نشان دهید:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\ell^2 + m^2\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)$$

ب— اگر f و g توابع مشتق پذیر بوده و z تابعی از دو متغیر مستقل x و y باشند به گونه‌ای که $f(x,y,z) = 0$ و $g(x,y,z) = 0$، در این صورت نشان دهید که:

$$\frac{dx}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}} = \frac{dy}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(z,x)}} = \frac{dz}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}}$$

۲) سه خط d_1، d_2 و d_3 با بردارهای هادی به ترتیب

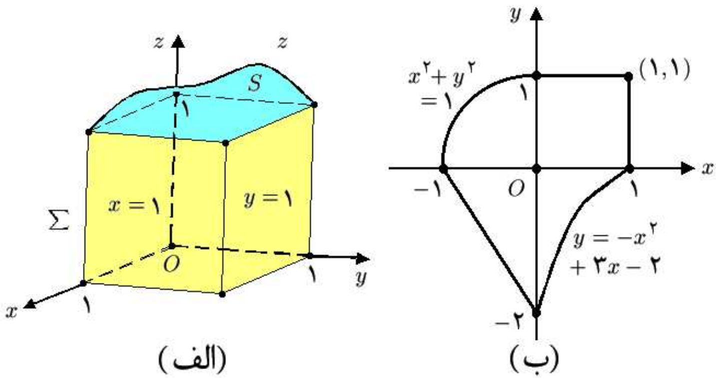
$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad \mathbf{v}_2 = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}, \quad \mathbf{v}_1 = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$$

از مبداء می‌گذرند. ابتدا نشان دهید که این سه خط روی یک صفحه قرار دارند و سپس معادلهٔ این صفحه را بنویسید.

۳) در پیوستگی تابع زیر بر کل $\mathbb{R}^2$ بحث کنید:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^6+y^4} & \text{اگر}\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{اگر}\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

۴) مساحت قسمتی از مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ را بیابید که توسط استوانهٔ به معادلهٔ $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$ بریده می‌شود. در آن a و b اعداد مثبتند.



شکل ۳۵.۲: (الف) مسألهٔ ٦ از امتحان نوزدهم (ب) مسألهٔ ۸ از امتحان نوزدهم

۵) قسمتی از مخروط $z^۲ = x^۲ + y^۲$ که توسط صفحهٔ $z = ۱$ محدود شده است و نیز قسمتی از صفحهٔ $z^۲ = x^۲ + y^۲$ بریده شده است را S می‌نامیم و فرض می‌کنیم که $\mathbf{F}(x,y,z) = (x+y)\,\mathbf{i} + (y+z)\,\mathbf{j} + (z+x)\,\mathbf{k}$. در این صورت درستی قضیهٔ دیورژانس (= واگرایی) را برای رویهٔ S و میدان $\mathbf{F}$ تحقیق کنید.

٦) مطلوبست محاسبهٔ کار انجام شده بوسیلهٔ نیروی (= میدان برداری)

$$\mathbf{F}(x,y) = (y + \cos y - y\sin x)\,\mathbf{i} + (۲x + \cos x - x\sin y)\,\mathbf{j}$$

که متحرکی را در جهت مثبت روی مسیر بستهٔ C مطابق شکل ۳۵.۲—(الف) جابجا می‌کند.

۷) فرض کنیم $۰ < a \leq b$. گشتاور ماند جسم واقع بین کره‌های $x^۲+y^۲+z^۲ = a^۲$ و $x^۲ + y^۲ + z^۲ = b^۲$ حول مبداء مختصات را در صورتی بیابید که چگالی حجمی این جسم با فاصلهٔ هر نقطه (x,y,z) تا مبداء مختصات برابر باشد.

۸) اگر $\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{i} - ۲y\mathbf{j} + (z+۳)\,\mathbf{k}$ و Σ سطح بستهٔ محدود به صفحات مختصاتی، $x = ۱$ و $y = ۱$ و نیز سطح هموار دلخواه S نشان داده شده در شکل ۳۵.۲—(ب) باشد، مطلوبست محاسبهٔ شار $\mathbf{F}$ بر S.

حل مسایل

پاسخ مسألهٔ ۱—الف) به کمک قاعدهٔ زنجیره‌ای مشتق، داریم

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \ell\frac{\partial z}{\partial u} - m\frac{\partial z}{\partial v} \\
\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲} &= \ell\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) - m\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right) \\
&= \ell\left(\frac{\partial^۲ z}{\partial u^۲}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^۲ z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right) - m\left(\frac{\partial^۲ z}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^۲ z}{\partial v^۲}\frac{\partial v}{\partial x}\right) \\
&= \ell\left(\ell\frac{\partial^۲ z}{\partial u^۲} - m\frac{\partial^۲ z}{\partial u\partial v}\right) - m\left(\ell\frac{\partial^۲ z}{\partial u\partial v} - m\frac{\partial^۲ z}{\partial v^۲}\right) \\
&= \ell^۲\frac{\partial^۲ z}{\partial u^۲} - ۲\ell m\frac{\partial^۲ z}{\partial u\partial v} + m^۲\frac{\partial^۲ z}{\partial v^۲}
\end{aligned}$$

به صورت مشابه

$$\frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲} = m^۲\frac{\partial^۲ z}{\partial u^۲} + ۲\ell m\frac{\partial^۲ z}{\partial u\partial v} + \ell^۲\frac{\partial^۲ z}{\partial v^۲}$$

و بنابراین

$$\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲} = \left(\ell^۲ + m^۲\right)\left(\frac{\partial^۲ z}{\partial u^۲} + \frac{\partial^۲ z}{\partial v^۲}\right)$$

پاسخ مسألهٔ ۱—ب) اگر C را منحنی فصل مشترک دو رویهٔ $f = ۰$ و $g = ۰$ بنامیم که توسط $\mathbf{r}(t)$ پارامتره شده است، در این صورت بردار مماس بر C در نقطهٔ t برابر است با

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \overrightarrow{\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)}$$

از طرفی حاصلضرب خارجی بردار گرادیان f در $\mathbf{r}(t)$ و نیز بردار گرادیان گرادیان g در $\mathbf{r}(t)$، یعنی بردار

$$\nabla f \times \nabla g = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \end{vmatrix} = \overrightarrow{\left(\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}, \frac{\partial(f,g)}{\partial(z,x)}, \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}\right)}$$

به منحنی C مماس است. اکنون کافی است شرط توازی $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ و $\nabla f \times \nabla g$ را نوشته و طرفین را در dt ضرب کنیم. به این ترتیب رابطهٔ مورد نظر بدست خواهد آمد.

پاسخ مسألهٔ ۲) شرط لازم و کافی برای مسطحه بودن این سه خط آن است که بردارهای هادی آنها وابستهٔ خطی باشند و این معادل با صفر شدن حاصلضرب مختلط آنها می‌باشد:

$$(\mathbf{v}_۱ \times \mathbf{v}_۲) \bullet \mathbf{v}_۳ = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۳ & ۵ & ۷ \\ ۲ & ۳ & ۸ \end{vmatrix} = (۱۹) - (۲۰) + (۱) = ۰$$

برای حصول به صفحهٔ گذرنده از این سه خط، کافی است با ضرب خارجی کردن دو تا از آنها، نرمال صفحه را بدست بیاوریم:

$$\mathbf{n} = \mathbf{v}_۱ \times \mathbf{v}_۲ = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۱ & ۲ & -۱ \\ ۳ & ۵ & ۷ \end{vmatrix} = \overrightarrow{(۱۹, -۱۰, -۱)}$$

و لذا، صفحهٔ مذکور عبارتست از $۱۹x = ۱۰y + z$.

پاسخ مسألهٔ ۳) اگر $X_۰ \neq (۰,۰)$ آنگاه f در همسایگی $X_۰$ برابر $\frac{x^۳y^۲}{x^۶+y^۴}$ است، که کسری از توابع پیوسته است و مخرج آن در $X_۰$ مخالف صفر است، بنابراین در $X_۰$ پیوسته می‌باشد. اگر $X_۰ = (۰,۰)$، در این صورت با فرض $\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(t^۲, t^۳)}$ داریم

$$\lim_{t\to ۰} f\left(\mathbf{r}(t)\right) = \lim_{t\to ۰} \frac{t^۶t^۶}{t^{۱۲} + t^{۱۲}} = \frac{۱}{۲} \neq ۰ = f(۰,۰)$$

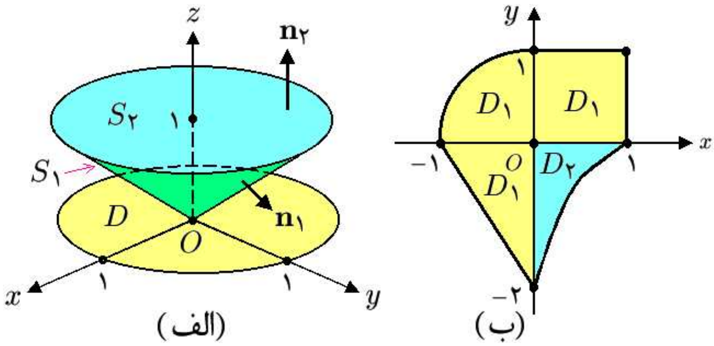
پس f در $(۰,۰)$ پیوسته نیست. یعنی، f بر $\mathbb{R}^۲ - \{(۰,۰)\}$ پیوسته است.

پاسخ مسألهٔ ۴) فرض می‌کنیم $D \;:\; \left(\frac{x}{a}\right)^{۳/۲} + \left(\frac{y}{b}\right)^{۲/۳} \leq ۱$، در این صورت مساحت مورد نظر برابر است با

$$A = \iint_D \sqrt{۱ + \left(\frac{x}{\sqrt{x^۲+y^۲}}\right)^۲ + \left(\frac{x}{\sqrt{x^۲+y^۲}}\right)^۲}\, dxdy = \sqrt{۲}\iint_D dxdy$$

حال فرض می‌کنیم $x = ar^۳\cos^۳\theta$ و $y = br^۳\sin^۳\theta$، در این صورت

$$\begin{aligned} J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| &= \left\| \begin{matrix} +۳ar^۲\cos^۳\theta & -۳ar^۳\sin\theta\cos^۲\theta \\ +۳br^۲\sin^۳\theta & ۳br^۳\cos\theta\sin^۲\theta \end{matrix} \right\| \\ &= ۹abr^۵\cos^۲\theta\sin^۲\theta = \frac{۹}{۴}abr^۵\sin^۲(۲\theta) \end{aligned}$$



شکل ۳۶.۲: (الف) مسألهٔ ۵ از امتحان نوزدهم (ب) مسألهٔ ۷ از امتحان نوزدهم

و تصویر D در صفحهٔ $Or\theta$ عبارت است از $D' \,:\, ۰ \le \theta \le ۲\pi \,,\; ۰ \le r \le ۱$. بنابراین

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{۲} \iint\limits_{D'} \frac{۹}{۴} a b r^{۵} \sin^{۲}(۲\theta)\, dr d\theta \\ &= \frac{۹ab}{۴}\sqrt{۲}\left(\int_{۰}^{۲\pi} \sin^{۲}(۲\theta)\, d\theta\right)\left(\int_{۰}^{۱} r^{۵}\, dr\right) \\ &= \frac{۹}{۴} ab\sqrt{۲}\left[\frac{\theta}{۲} + \frac{۱}{۸}\sin(۴\theta)\right]_{۰}^{۲\pi} \left[\frac{r^{۶}}{۶}\right]_{۰}^{۱} = \frac{۳}{۸}\pi\, ab\sqrt{۲} \end{aligned}$$

پاسخ مسألهٔ ۵) الف) به کمک قضیهٔ دیورژانس. در این مسأله درون رویهٔ بستهٔ S مخروطی است تو پر:

$$\Omega \;:\; x^{۲} + y^{۲} \le z^{۲} \,,\, z \le ۱ \,,\, ۰ \le z \;:\; \sqrt{x^{۲} + y^{۲}} \le z \le ۱$$

حجم این مجموعه برابر

$$\mathrm{Vol}(\Omega) = \frac{۱}{۳}\mathrm{Area}\,(D) \times h = \frac{۱}{۳} \times \pi \times ۱^{۲} \times ۱ = \frac{\pi}{۳}$$

است، که در آن $D \,:\, x^{۲} + y^{۲} \le ۱$ و $h = ۱$. در ادامه، داریم

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{div}(\mathbf{F})\, dV = \iiint\limits_{\Omega} ۳\, dV = ۳\mathrm{Vol}(\Omega) = \pi$$

ب) محاسبهٔ مستقیم. در اینجا S از دو بخش تشکیل شده است: S_1 و S_2. به عبارت دیگر

$$S_1 \,:\, z=\sqrt{x^2+y^2}\,,\ (x,y)\in D \quad , \qquad S_2 \,:\, z=1\,;\ (x,y)\in D$$

به شکل ۳۶.۲—(الف) توجه شود. تابع معرف رویهٔ S_1 عبارت است از $f=x^2+y^2-z^2$، بنابراین

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}_1 &= \pm\frac{f'}{\|f'\|}=\pm\frac{\overrightarrow{(2x,2y,-2z)}}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}\\
&= \frac{\pm 1}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}}\overrightarrow{\left(x,y,-\sqrt{x^2+y^2}\right)}\\
d\sigma_1 &= \frac{\|f'\|}{|f_z|}=\frac{2\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}}{|-2z|}=\sqrt{2}\,dxdy
\end{aligned}$$

که با توجه به مفروضات مسأله و شکل ۳۶.۲—(الف) حالت مثبت در $\mathbf{n}$ مورد قبول است. در مورد S_2 نیز ملاحظه می‌گردد که

$$\mathbf{n}_2=\mathbf{k} \quad , \qquad d\sigma=\,dxdy$$

پس در مجموع داریم

$$\begin{aligned}
\oiint\limits_{(S)} \mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma &= \iint\limits_{(S_1)}\mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma+\iint\limits_{(S_2)}\mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma\\
&= \iint\limits_{D}\overrightarrow{\left(x+y,y+\sqrt{x^2+y^2},x+\sqrt{x^2+y^2}\right)}\\
&\quad \bullet\frac{\overrightarrow{\left(x,y,-\sqrt{x^2+y^2}\right)}}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}}\sqrt{2}\,dxdy\\
&\quad +\iint\limits_{D}\overrightarrow{(x+y,y+1,x+1)}\bullet\overrightarrow{(0,0,1)}\,dxdy\\
&= \iint\limits_{D}\frac{xy+y\sqrt{x^2+y^2}-x\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy\\
&\quad +\iint\limits_{D}(x+1)\ dxdy
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \iint\limits_D \frac{xy}{\sqrt{x^۲+y^۲}}\,dxdy + \iint\limits_D y\,dxdy + \iint\limits_D dxdy \\
&\overset{(۱)}{=} ۰ + ۰ + \text{Area}(D) = \pi \times ۱^۲ = \pi
\end{aligned}
$$

دو انتگرال در قبل از تساوی (۱) به این دلیل صفرند که انتگرال یک تابع فرد بر دامنهٔ متقارن هستند و این نوع انتگرالها همواره صفر است.

پاسخ مسألهٔ ٦) از قضیهٔ گرین استفاده می‌کنیم. برای این منظور توجه می‌کنیم که درون منحنی معرفی شده در شکل ۳۵.۲—(ب) عبارت است از $D = D_۱ \cup D_۲$ که این مجموعه‌ها در شکل ۳٦.۲—(ب) معرفی شده‌اند. به این ترتیب، داریم

$$
\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} &= \iint\limits_D (Q_x - P_y)\,dxdy \\
&= \iint\limits_D \{(۲ - \sin x - \sin y) - (۱ - \sin y - \sin x)\}\,dxdy \\
&= \iint\limits_D dxdy = \iint\limits_{D_۱} dxdy + \iint\limits_{D_۲} dxdy \\
&= \text{Area}(D_۱) + \int_۰^۱ \left[\int_{-x^۲+۳x-۲}^{۰} dy\right] dx \\
&= \frac{۱}{۴}\pi \times ۱^۲ + ۱ \times ۱ + \frac{۱}{۲} \times ۱ \times ۲ + \int_۰^۱ \left(x^۲ - ۳x + ۲\right) dx \\
&= \frac{\pi}{۴} + ۱ + ۱ + \left[\frac{x^۳}{۳} - ۳\frac{x^۲}{۲} + ۲x\right]_۰^۱ = \frac{\pi}{۴} + \frac{۱۷}{٦}
\end{aligned}
$$

پاسخ مسألهٔ ۷) جسم مورد نظر عبارت است از $\Omega \,:\, a^۲ \le x^۲ + y^۲ + z^۲ \le b^۲$ که تصویر آن در مختصات کروی عبارت است از

$$
\Omega' \,:\, a \le \rho \le b\,,\ ۰ \le \theta \le ۲\pi\,,\ \frac{-\pi}{۲} \le \varphi \le \frac{\pi}{۲}
$$

در نتیجه

$$
\begin{aligned}
I_O &= \iiint\limits_\Omega \left(x^۲ + y^۲ + z^۲\right) \delta(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_\Omega \left(x^۲ + y^۲ + z^۲\right)^{۳/۲} dV \\
&= \iiint\limits_{\Omega'} \rho^۳\, \rho^۲ \cos\varphi\, d\rho d\varphi d\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\int_{0}^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi \, d\varphi\right)\left(\int_{a}^{b} \rho^{5}\, d\rho\right) \\
&= \Big[\theta\Big]_{0}^{2\pi} \times \Big[\sin\varphi\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} \times \left[\frac{\rho^{6}}{6}\right]_{a}^{b} = \frac{4\pi}{6}\left(b^{6}-a^{6}\right)
\end{aligned}
$$

پاسخ مسألهٔ ۸) چون $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 0$ پس انتگرال F بر هر سطح بسته‌ای صفر است، فرض می‌کنیم S_1 وجه بالایی مکعب واحد با $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$ باشد. یعنی

$$
S \,:\, z = 1 \,;\; (x,y) \in D \quad , \quad \mathbf{n} = -\mathbf{k} \quad , \quad d\sigma = dxdy
$$

که در آن $D \,:\, 0 \le x \le 1 \,,\, 0 \le y \le 1$. در نتیجه

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{(S)} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, d\sigma &= \oiint\limits_{(S_1+S)} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, d\sigma - \iint\limits_{(S_1)} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, d\sigma = -\iint\limits_{(S_1)} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, d\sigma \\
&= -\iint\limits_{D} \overrightarrow{(x, -2y, 1+3)} \bullet \overrightarrow{(0, 0, 1)}\, dxdy \\
&= 4\iint\limits_{D} dxdy = 4\,\mathrm{Area}(D) = 4 \times 1 \times 1 = 4
\end{aligned}
$$

۲۰.۲ امتحان بیستم

صورت مسایل

۱) معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که از خط $\ell \ : \ \begin{cases} ۳x + z = ۱ \\ ۳y + z = ۱۰ \end{cases}$ می‌گذرد و بر رویهٔ $S \ : \ x^۲ + y + z = ۳$ مماس است.

۲) بردار یکهٔ مماس بر مسیر حرکت متحرکی که با قانون زیر حرکت می‌کند را در لحظهٔ $t = \sqrt{\pi/۲}$ بدست آورید:

$$x = ۳\int_۰^t \sin\left(u^۲\right) du \ \ , \ \ y = ۵\int_۰^t \cos\left(u^۲\right) du \ \ , \ \ z = ۴\int_۰^t \sin\left(u^۲\right) du$$

سپس مشتق سویی تابع $f(x,y,z) = x^۲ + y^۲ + z^۲$ را در امتداد این بردار و در نقطهٔ $X_۰ = (۱, ۴, ۱/۲)$ محاسبه کنید.

۳) فرض کنید $f(u,v,w)$ تابعی مشتقپذیر است و $f(x-y, y-z, z-x) = ۰$. در این صورت، مقدار عبارت $۱ - x\dfrac{\partial z}{\partial y} - y\dfrac{\partial z}{\partial x}$ را محاسبه کنید.

۴) مساحت آن قسمت از سطح $S : z = \dfrac{x+y}{x^۲+y^۲}$ که توسط رویه‌های

$$S_۱ \ : \ x^۲ + y^۲ = ۱ \qquad , \qquad S_۲ \ : \ x^۲ + y^۲ = ۴$$

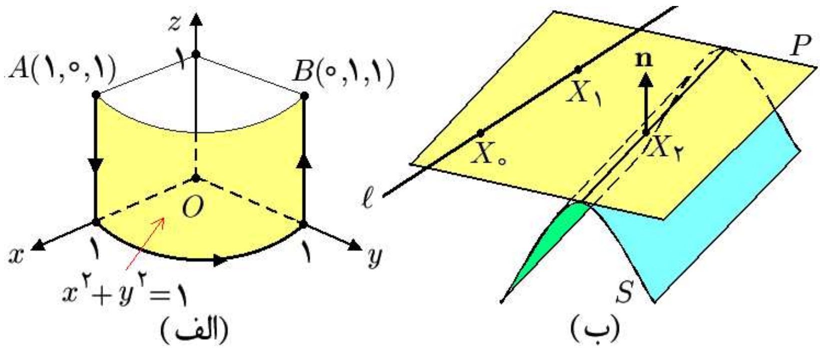
جدا شده است و در یک هشتم اول قرار دارد را محاسبه کنید.

۵) متحرکی بر مسیر نشان داده شده در شکل ۳۷.۲–(الف) حرکت می‌کند. کار انجام شده توسط این متحرک تأثیر میدان برداری

$$\mathbf{F} = (yz - ۲x)\mathbf{i} + (xz - ۲y)\mathbf{j} + (xy - ۲z)\mathbf{k}$$

را محاسبه کنید.

٦) فرض کنید رویهٔ S سطح خارجی جسم محدود به نیم کرهٔ $z = ۲ + \sqrt{۴ - x^۲ - y^۲}$ و مخروط $z = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ باشد. به کمک قضیهٔ دیورژانس از میدان برداری $\mathbf{F} = \overrightarrow{(x^۳, y^۳, z^۳)}$ بر سطح خارجی S انتگرال بگیرید.



شکل ۳۷.۲: (الف) مسألهٔ ۵ از امتحان بیستم (ب) مسألهٔ ۱ از امتحان بیستم

۷) مقدار کار انجام شده توسط متحرکی که بر منحنی بستهٔ

$$C\ :\ x^2+y^2=1\ \ ,\ \ x^2+y^2+z=1$$

حرکت می‌کند و تحت تأثیر میدان برداری $\mathbf{F}=\overrightarrow{(x^2y,-y^3,3)}$ قرار دارد را یک بار مستقیم، و بار دیگر به کمک قضیهٔ استوکس محاسبه کنید.

۸) تنها به یکی از دو مورد زیر پاسخ دهید:

الف) رویهٔ درجه دوم $x^2+y^2-z^2-2xy+2xz+2yz+x-y=0$ را به شکل کانونی تبدیل کرده، نوع آن را مشخص کنید.

ب) ابتدا مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ نظیر به ماتریس A را بدست آورده و سپس آن را قطری کنید:

$$A:=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

حل مسایل

پاسخ مسألهٔ ۱) فرض کنید مسأله حل شده است و P صفحه‌ای با تکیه‌گاه X_0 و نرمال $\mathbf{n}=\overrightarrow{(a,b,c)}$ است که در شرایط مسأله صدق می‌کند. روشن است که X_0 را نقطه‌ای از ℓ می‌توان انتخاب نمود. مثلاً، $X_0=(0,3,1)$. بعلاوه، با فرض $z=4$ به نقطهٔ

$X_1=(-۱,۲,۴)$ بر ℓ و در نتیجه بر P می‌رسیم. بنابراین، بایستی X_1 در معادلهٔ P صدق کند. یعنی، $\mathbf{n}\bullet(X_1-X_\circ)=\circ$ یا $a+b=۳c$.

اما، مطابق صورت مسأله (به شکل ۳۷.۲—(ب) توجه شود)، بایستی نقطه‌ای چون $X_۲$ بر S یافت گردد که $\mathbf{n}$ با گرادیان تابع $f=x^۲+y+z$ معرف S در $X_۲$ موازی باشد: $\mathbf{n}\|\nabla f(X_۲)$. یعنی، $\overrightarrow{(a,b,c)}\|\overrightarrow{(۲x_1,۱,۱)}$. به بیان دیگر، بایستی $\frac{a}{۲x_1}=\frac{b}{۱}=\frac{c}{۱}$. بنابراین $b=c$. از معادلهٔ $a+b=۳c$ نتیجه می‌شود $a=۲c$ و در نتیجه $\mathbf{n}=\overrightarrow{(۲c,c,c)}$. (توجه شود که طول $\mathbf{n}$ مهم نیست و لذا می‌توان فرض نمود $\mathbf{n}=\overrightarrow{(۲,۱,۱)}$.) بنابراین، معادلهٔ صفحهٔ مورد نظر عبارت است از

$$P\ :\ \mathbf{n}\bullet(X-X_\circ)=\circ\ :\ ۲(x-\circ)+(y-۳)+(z-۱)=\circ$$

به بیان دیگر $P\ :\ ۲x+y+z=۴$.

پاسخ مسألهٔ ۲) با توجه به فرمول مشتق از انتگرال داریم

$$\mathbf{r}'\left(\sqrt{\frac{\pi}{۲}}\right)=\overrightarrow{\left(۳\sin t^۲,۵\cos t^۲,۴\sin t^۲\right)}\Big|_{t=\sqrt{\pi/۲}}$$

برای محاسبهٔ مشتق امتدادی ابتدا بردار یکهٔ مماس در نقطهٔ $X_\circ=\mathbf{r}(\sqrt{\pi/۲})$ را تعیین می‌کنیم:

$$\mathbf{T}\left(\sqrt{\frac{\pi}{۲}}\right)=\frac{\mathbf{r}'\left(\sqrt{\pi/۲}\right)}{\left\|\mathbf{r}'\left(\sqrt{\pi/۲}\right)\right\|}=\frac{۱}{۵}\overrightarrow{(۳,\circ,۴)}$$

در نتیجه، داریم

$$\begin{aligned}Df_{\mathbf{T}\left(\sqrt{\pi/۲}\right)}(X_\circ) &= f'(X_\circ)\bullet\mathbf{T}\left(\sqrt{\frac{\pi}{۲}}\right)=\overrightarrow{(۲x,۲y,۲z)}\Big|_{X_\circ}\bullet\frac{۱}{۵}\overrightarrow{(۳,\circ,۴)}\\ &= \frac{۱}{۵}\overrightarrow{(۲,۴,۱)}\bullet\overrightarrow{(۳,\circ,۴)}=۲\end{aligned}$$

پاسخ مسألهٔ ۳) فرض کنیم $u=x-y$، $v=y-z$ و $w=z-x$. در نتیجه $f(u,v,w)=\circ$ و به کمک قانون مشتق از تابع ضمنی، داریم

$$۱-x\frac{\partial z}{\partial y}-y\frac{\partial z}{\partial x}=۱-x\frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}-y\frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

$$
\begin{aligned}
&= ۱ + x\frac{\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}} + y\frac{\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}} \\
&= ۱ + x\frac{-\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}}{-\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial w}} + y\frac{\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial w}}{-\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial w}} \\
&= \frac{(y-x)\frac{\partial f}{\partial u} + (x-۱)\frac{\partial f}{\partial v} + (۱-y)\frac{\partial f}{\partial w}}{\frac{\partial f}{\partial w} - \frac{\partial f}{\partial v}}
\end{aligned}
$$

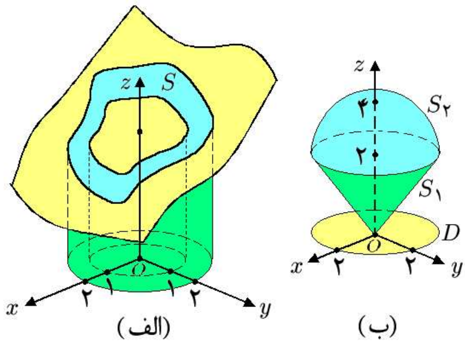
پاسخ مسألهٔ ۴) با ترسیم تقریبی تابع $f(x,y) = \frac{x+y}{x^۲+y^۲}$ و رویه‌های $S_۱$ و $S_۲$ ملاحظه می‌گردد که تصویر سطح مورد نظر بر xy–صفحهٔ عبارت است از $D : ۱ \leq x^۲ + y^۲ \leq ۴$. در نتیجه، مساحت مورد نظر برابراست از

$$
\begin{aligned}
A &= \iint_D \sqrt{۱ + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^۲ + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^۲}\, dA \\
&= \iint_D \sqrt{۱ + \left(\frac{y^۲ - x^۲ - ۲xy}{(x^۲+y^۲)^۲}\right)^۲ + \left(\frac{x^۲ - y^۲ - ۲xy}{(x^۲+y^۲)^۲}\right)^۲}\, dA \\
&= \iint_D \frac{۱}{(x^۲+y^۲)^۲}\sqrt{(x^۲+y^۲)^۲ + ۲}\, dA \overset{(۱)}{=} \iint_{D'} \frac{۱}{r^۴}\sqrt{r^۴+۲}.r\, dA \\
&= \left(\int_۰^{۲\pi} d\theta\right)\left(r^{-۳}(r^۴+۲)^{۱/۲}\, dr\right) \\
&\overset{(۲)}{=} \pi\int_{\sqrt{۲}}^{\sqrt{۱۷}/۴} \frac{u^۲\, du}{u^۲ - ۱} = \frac{\pi}{۲}\left[\ln\left|\frac{u-۱}{u+۱}\right| + ۲u\right]_{\sqrt{۲}}^{\sqrt{۱۷}/۴} \\
&= \frac{\pi}{۴}\left(۲\ln\left(\frac{\sqrt{۲}-۱}{\sqrt{۲}+۱}\,\frac{\sqrt{۱۷}+۴}{\sqrt{۱۷}-۴}\right) + ۴\sqrt{۲} - \sqrt{۱۷}\right)
\end{aligned}
$$

توضیح اینکه در (۱) از تغییر متغیر قطبی استفاده نموده‌ایم و

$$D' : ۰ \leq \theta \leq ۲\pi, ۱ \leq r \leq ۲$$

انتگرال قبل از تساوی (۲) یک انتگرال از دو جمله‌ای دیفرانسیلی است و لذا فرض می‌کنیم $r^۴ + ۱ = u^۲r^۴$. به شکل ۳۸.۲–(الف) توجه شود.



شکل ۳۸.۲: (الف) مسألهٔ ۴ از امتحان نوزدهم (ب) مسألهٔ ٦ از امتحان بیستم

پاسخ مسألهٔ ۵) آیا میدان داده شده ابقائی است؟ برای پاسخ به این پرسش کرل میدان را محاسبه می‌کنیم:

$$\mathrm{Curl}(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ yz - 2x & xz - 2y & xy - 2z \end{vmatrix} = \overrightarrow{(x-x, y-y, z-z)} = \mathbf{0}$$

پس $\mathbf{F}$ بر کل $\mathbb{R}^3$ ابقائی است. در ادامه، پتانسیل $\mathbf{F}$ را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = yz - 2x \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = xz - 2y \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = xy - 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f = xyz - x^2 + A(y,z) \\ f = xyz - y^2 + B(x,z) \\ f = xyz - z^2 + C(x,y) \end{cases}$$

که $A(y,z)$، $B(x,z)$ و $C(x,y)$ توابع دلخواهند. با مقایسهٔ این سه مورد، نتیجه می‌گیریم: $f = xyz - x^2 - y^2 - z^2 + E$ که E عددی ثابت است. در نتیجه

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A) = (-2) - (-2) = 0$$

پاسخ مسألهٔ ٦) ابتدا درون رویهٔ $S = S_1 + S_2$ را مشخص می‌کنیم، که S_1 یک مخروط است و S_2 یک نیم کره می‌باشد. به شکل ۳۸.۲—(ب) توجه شود. با برخورد

دادن مخروط و کره، نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^۲ + y^۲} \\ z = ۲ + \sqrt{۴ - x^۲ - y^۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^۲ + y^۲ = z^۲ \\ x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۴z \\ ۰ \leq z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z^۲ = ۲z \\ ۰ \leq z \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z = ۰ \\ z = ۲ \end{array} \right.$$

که $z = ۰$ جواب خارجی است. بنابراین، تصویر این جسم دوکی شکل بر xy–صفحه عبار تاست از $D : x^۲ + y^۲ \leq ۴$. به شکل ۳۸.۲–(ب) توجه شود. به این ترتیب درون رویهٔ S مورد نظر عبارت است از

$$\Omega : \sqrt{x^۲ + y^۲} \leq z \leq ۲ + \sqrt{۴ - x^۲ - y^۲}\ ,\ (x, y) \in D$$

در ادامه لازم است Ω را به مختصات استوانه‌ای ببریم. در این صورت، تصویر Ω در فضای $Or\theta z$ عبارت است از

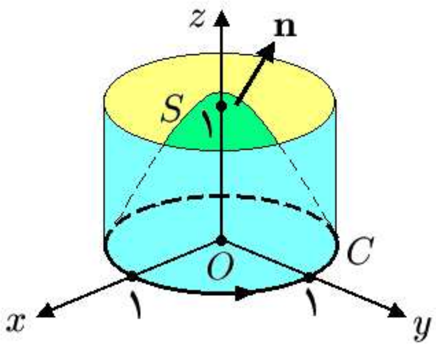
$$\begin{aligned} \Omega' \quad &: \quad r \leq z \leq ۲ + \sqrt{۴ - r^۲}\,, r^۲ \leq ۴ \\ &: \quad ۰ \leq \theta \leq ۲\pi\,, ۰ \leq r \leq ۲\,, r \leq z \leq ۲ + \sqrt{۴ - r^۲} \end{aligned}$$

به این ترتیب، داریم

$$\begin{aligned} \iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{F})\, dV &= \iiint\limits_{\Omega} ۳(x^۲ + y^۲ + z^۲)\, dV = \iiint\limits_{\Omega'} ۳(r^۲ + z^۲) r\, dV' \\ &= ۳ \left(\int_۰^{۲\pi} d\theta \right) \times \int_۰^۲ \left[\int_۰^{۲+\sqrt{۴-r^۲}} (r^۳ + rz^۲)\, dz \right] dr \\ &= ۶\pi \int_۰^۲ \left[r^۳ z + r\frac{z^۳}{۳} \right]_۰^{۲+\sqrt{۴-r^۲}} dr \\ &= ۴\pi \int_۰^۲ \left\{ r(r^۲ + ۸)\sqrt{۴ - r^۲} + ۱۶r \right\} dr \\ &= \frac{۸\pi}{۱۵} \left[-(۱۶ + r^۲)(۴ - r^۲)^{۳/۲} + ۸۰r^۲ \right]_۰^۲ = \frac{۷۶۸}{۵}\pi \end{aligned}$$

پاسخ مسألهٔ ۷) الف — به کمک قضیهٔ استوکس) رویهٔ

$$S : z = ۱ - x^۲ - y^۲\ ;\ (x, y) \in D$$



شکل ۲.۳۹: مسألهٔ ۷ از امتحان بیستم

را در نظر می‌گیریم، که $D : x^۲ + y^۲ \leq ۱$. به شکل ۲.۳۹ توجه شود. تابع معرف رویه $f = x^۲ + y^۲ + z$ است. بنابراین

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \pm\frac{f'}{\|f'\|} = \pm\frac{\overrightarrow{(۲x, ۲y, ۱)}}{\sqrt{۴x^۲ + ۴y^۲ + ۱}} \\ d\sigma &= \frac{\|f'\|}{|f_z|}\, dxdy = \sqrt{۴x^۲ + ۴y^۲}\, dxdy \end{aligned}$$

که با توجه به لزوم سازگاری جهت S و C و شکل ۲.۳۹ حالت $+$ در $\mathbf{n}$ مورد قبول است. از طرفی

$$\operatorname{Curl}(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x^۲ y & -y^۳ & ۳ \end{vmatrix} = \overrightarrow{(۰, ۰, -x^۲)}$$

بنابراین، در مجموع داریم

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} \operatorname{Curl}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}\, d\sigma &= \iint_D \left(\overrightarrow{۰, ۰, -x^۲}\right) \bullet \overrightarrow{(۲x, ۲y, ۱)} = -\iint_D x^۲\, dxdy \\ &\overset{(۱)}{=} -\iint_{D'} r^۲ \cos^۲\theta\, r\, drd\theta = -\left(\int_۰^{۲\pi} \cos^۲\theta\, d\theta\right)\left(\int_۰^۱ r^۳\, dr\right) = -\frac{\pi}{۴} \end{aligned}$$

محاسبهٔ مستقیم) ابتدا منحنی را پارامتره می‌کنیم:

$$C : \mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(\cos t, \sin t, ۰)}\,; \; ۰ \leq t \leq ۲\pi$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} &= \int_{۰}^{۲\pi} \overrightarrow{(\cos^{۲} t\sin t, -\sin^{۳} t, ۳)} \bullet \overrightarrow{(-\sin t, \cos t, ۰)}\, dt \\ &= -\int_{۰}^{۲\pi} \left(\cos^{۲} t\sin^{۲} t + \sin^{۳} t\cos t\right)\, dt \\ &= -\int_{۰}^{۲\pi} \left\{\frac{۱}{۸}(۱-\sin ۴t) + \frac{۱}{۴}\sin^{۴} t\right\}\, dt = -\frac{\pi}{۴}\end{aligned}$$

پاسخ مسألهٔ ۸) ماتریس نظیر به قسمت درجه دوم چندجمله‌ای سازندهٔ معادلهٔ داده شده، یعنی $x^{۲}+y^{۲}-z^{۲}-۲xy+۲xz+۲yz+x-y$، عبارت است از

$$A := \begin{pmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & -۱ \end{pmatrix}$$

معادلهٔ مشخصهٔ آن $\det(\lambda I_{۳}-A) = \lambda^{۳}-\lambda^{۲}-۴\lambda+۴ = ۰$ است که بنابراین، مقادیر ویژهٔ آن $\lambda_{۱}=۲$، $\lambda_{۲}=-۲$ و $\lambda_{۳}=۱$ هستند. با حل دستگاه $A\mathbf{v}_i=\lambda_i\mathbf{v}_i$، که $i=۱,۲,۳$ به نتیجهٔ زیر می‌رسیم:

$$\mathbf{v}_{۱} = \overrightarrow{(-۱,۱,۰)}\ ,\ \ \mathbf{v}_{۲} = \overrightarrow{(۱,۱,-۲)}\ ,\ \ \mathbf{v}_{۳} = \overrightarrow{(۱,۱,۱)}\ .$$

چنانچه $\mathbf{w}_i = \mathbf{v}_{۱}/\|\mathbf{v}_i\|$ بردار یکهٔ نظری به $\mathbf{v}_i$ با $i=۱,۲,۳$ باشد و $B=[\mathbf{w}_{۱}^t,\mathbf{w}_{۲}^t,\mathbf{w}_{۳}^t]$ ماتریس حاصل از قرار دادن بردارهای $\mathbf{w}_i$ به صورت ستونی و به ترتیب در کنار هم باشد، در این صورت

$$B = \begin{pmatrix} -۱/\sqrt{۲} & ۱/\sqrt{٦} & ۱/\sqrt{۳} \\ ۱/\sqrt{۲} & ۱/\sqrt{٦} & ۱/\sqrt{۳} \\ ۰ & -۲/\sqrt{٦} & ۱/\sqrt{۳} \end{pmatrix}$$

این ماتریس، ماتریسی متعامد است (یعنی $B^{-۱}=B$) و بعلاوه

$$B^tAB = \begin{pmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

تا اینجا به قسمت (ب) پاسخ داده شده است. در ادامه برای پاسخ به قسمت (الف)، فرض می‌کنیم

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x/\sqrt{۲}+y/\sqrt{٦}+z/\sqrt{۳} \\ x/\sqrt{۲}+y/\sqrt{٦}+z/\sqrt{۳} \\ -۲y/\sqrt{٦}+z/\sqrt{۳} \end{pmatrix}$$

که پس از جایگذاری این مقادیر در معادلهٔ داده شده، به تصویر این رویه در فضای $Ouvw$ می‌رسیم: $۲u^۲ - ۲v^۲ + w^۲ - \sqrt{۲}u = ۰$. این رویه یک هذلولی گون یک پارچه است:

$$\frac{(u - \sqrt{۲}/۴)^۲}{(۲\sqrt{۲})^۲} - \frac{v^۲}{(۲\sqrt{۲})^۲} + \frac{w^۲}{۴^۲} = ۱$$

۲۱.۲ امتحان بیست و یکم

صورت مسایل

۱) فرض کنید $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}$. فرمولی کلی برای A^n که n عددی طبیعی است، بدست آورید.

۲) فرض کنید صفحهٔ $x + y + z = 1$ را با مخروط $x^2 + y^2 = z^2$ برخورد داده و منحنی حاصل را بر صفحهٔ xOy تصویر کنیم. ضمن تعیین معادلهٔ این منحنی، نوع آن را مشخص کرده و آن را ترسیم کنید.

۳) در پیوستگی تابع $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + y}{x^2 + y^4} & (x,y) \neq (0,0) \text{ اگر } \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ بر $\mathbb{R}^2$ بحث کنید.

۴) در صورتی که $xyz = x^2 + 2z^2$، مطلوبست $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(1,1,1)}$.

۵) در صورتی که نقطهٔ (x,y) از جسم تخت محدود به منحنیهای $x^2y = 1$، $x^2y = 2$، $xy^2 = 1$ و $xy^2 = 2$ دارای چگالی جرمی $\delta(x,y) = x^5y^5$ باشد، جرم آن را بدست آورید.

۶) فرض کنید Ω جسم بستهٔ به ضابطهٔ $x^2 + y^2 \leq \sin z$ با $0 \leq z \leq \pi$ است. در صورتی که نقطهٔ (x,y,z) از آن دارای چگالی جرمی z باشد، گشتاور ماند آن حول z–محور را بدست آورید.

۷) فرض کنید C اجتماع نمودار تابع $r = \theta$ با $0 \leq \theta \leq 2\pi$ و پاره خط از $(0,0)$ تا $(0,2\pi)$ در صفحهٔ xOy است. انتگرال میدان برداری $\mathbf{F} = -y^3\mathbf{i} + x^3\mathbf{j}$ را بر C با جهت مثلثاتی، محاسبه کنید.

۸) فرض کنید $\mathbf{F} = \overrightarrow{(z^3, y^3, x^3)}$ و S قسمتی از نیمهٔ بالایی کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ است که در نیم فضای $x \leq 0$ قرار دارد و بردار $\mathbf{n}$ بر S رو به بالا جهت دارد. مطلوبست محاسبهٔ انتگرال میدان برداری $\mathrm{Curl}(\mathbf{F})$ بر لبهٔ S به کمک قضیهٔ استوکس.

حل مسایل

پاسخ مسألهٔ ۱) فرض کنیم $A^n = \begin{bmatrix} x_n & 0 \\ y_n & z_n \end{bmatrix}$. در نتیجه، چون $A^0 = I_2$، داریم $x_0 = z_0 = 1$ و $y_n = 0$. بعلاوه از $A^{n+1} = A^n A$، نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} & 0 \\ y_{n+1} & z_{n+1} \end{bmatrix} = A^{n+1} = A^n A = \begin{bmatrix} x_n & 0 \\ y_n & z_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ax_n & 0 \\ ay_n + bz_n & cz_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_{n+1} = ax_n & (1) \\ y_{n+1} = ay_n + bz_n & (2) \\ z_{n+1} = cz_n & (3) \end{cases}$$

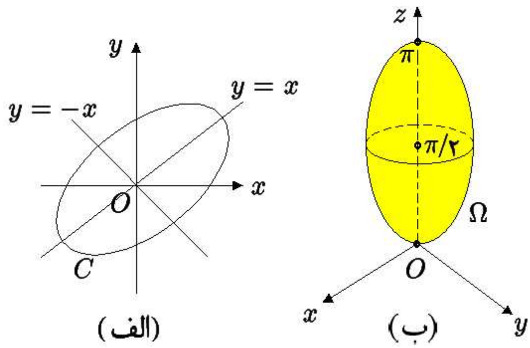
اکنون از اینکه $x_0 = 1$ و فرمول (۱) نتیجه می‌گردد که $x_n = a^n$ به صورت مشابه از اینکه $z_0 = 1$ و فرمول (۳) نتیجه می‌شود $z_n = c^n$. بنابراین، از (۲) داریم: $y_{n+1} = ay_n + bc^n$. در نتیجه

$$\begin{aligned} y_n &= ay_{n-1} + bc^{n-1} = a(ay_{n-2} + bc^{n-2}) + bc^{n-2} \\ &= a^2 y_{n-2} + b(c^{n-1} + ac^{n-2}) \\ &\vdots \\ &= a^n y_0 + b(c^{n-1} + ac^{n-2} + a^2 c^{n-3} + \cdots + a^{n-1}) \\ &= \begin{cases} b(a^n - c^n)/(a-c) & a \neq c \text{ اگر} \\ 0 & a = c \text{ اگر} \end{cases} \end{aligned}$$

در نتیجه، اگر $a = c$، آنگاه به ازای هر $n \geq 2$ ای $A^n = a^n I_n$ و در این صورت به ازای هر n ای $A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ b(a^n - c^n)/(a-c) & c^n \end{bmatrix}$.

پاسخ مسألهٔ ۲) از $x + y + z = 1$ نتیجه می‌گیریم $z = 1 - x - y$ و با قرار دادن در $x^2 + y^2 = z^2$ نتیجه می‌گیریم $2x^2 + 2y^2 = 2xy + 1$. این منحنی را به صورت $3(x-y)^2 + (x+y)^2 = 2$ می‌توان مربع کامل نمود. در نتیجه، داریم تصویر منحنی مورد نظر بر صفحهٔ xOy عبارت است از $1 = \frac{(x+y)^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{(x-y)^2}{(\sqrt{2/3})^2}$، که یک بیضی است. چنانچه فرض کنیم $u = x - y$ و $v = x + y$، این منحنی به شکل $1 = \frac{v^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{u^2}{(\sqrt{2/3})^2}$ در صفحهٔ uOv تبدیل می‌شود. پس کافی است دو محور $y = 2x$ و $y = 0$ را ترسیم کنیم و در این صفحه، بیضی مورد نظر را ترسیم کنیم. به شکل ۲.۴۰—(الف) توجه شود.

پاسخ مسألهٔ ۳) این تابع در همسایگی هر نقطهٔ $X_0 \neq (0, 0)$ ای با تابع مقدماتی $x^2y/(x^2 + y^4)$ برابر است که تابعی پیوسته است. بنابراین، f بر کل $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$



شکل ۲.۴۰: (الف) مسألهٔ ۲ از امتحان بیست و یکم (ب) مسألهٔ ٦ از امتحان بیست و یکم

پیوسته است. اما، f در $(\circ,\circ)$ نیز پیوسته است، زیرا

$$|f(x,y)-f(\circ,\circ)| = \left|\frac{x^۲y}{x^۲+y^۴}\right| = \frac{x^۲|y|}{x^۲+\circ} = |y|$$

از طرفی، اگر $(x,y)\to(\circ,\circ)$، آنگاه $|y|\to\circ$. بنابراین، f بر کل $\mathbb{R}^۲$ پیوسته است.

پاسخ مسألهٔ ۴) فرض کنید $f = xyz - x^۲ - ۲z^۲$، در این صورت، بنابه قضیهٔ تابع ضمنی، داریم

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(۱,۱,۱)} &= -\frac{f_x}{f_z} = \left.\frac{۲x-yz}{xy-۴z}\right|_{(۱,۱,۱)} = -۳\\
\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(۱,۱,۱)} &= -\frac{f_y}{f_z} = \left.\frac{-xz}{xy-۴z}\right|_{(۱,۱,۱)} = ۳\\
\left.\frac{\partial^۲ z}{\partial x\partial y}\right|_{(۱,۱,۱)} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\Big|_{(۱,۱,۱)}\\
&= -\left.\frac{\left(-z-x\frac{\partial z}{\partial x}\right)(xy-۴z)-\left(y-۴\frac{\partial z}{\partial x}\right)(-xz)}{(xy-۴z)^۲}\right|_{(۱,۱,۱)}\\
&= \frac{x^۲y^۲z+۴xyz^۲-۱٦z^۳-۲x^۳y}{(xy-۴z)^۳} = -\frac{۱۷}{۲۷}
\end{aligned}$$

پاسخ مسألهٔ ۵) از تغییر متغیر $u=x^۲y$ و $v=xy^۲$ استفاده می‌کنیم. در این صورت

$$D\ :\ ۱\le x^۲y\le ۲\,,\ ۱\le xy^۲\le ۲\ \ \Rightarrow\ \ D'\ :\ ۱\le u\le ۲\,,\ ۱\le v\le ۲$$

$$J=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = ۱\div\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = ۱\div\left\|\begin{matrix}۲xy & x^۲\\ y^۲ & ۲xy\end{matrix}\right\| = \frac{۱}{۳x^۲y^۲}$$

در نتیجه، داریم

$$\begin{aligned} m &= \iint\limits_D \delta\, dA = \iint\limits_D x^5y^5\, dxdy = \iint\limits_{D'} x^5y^5 \frac{1}{3x^2y^2}\, dudv \\ &= \frac{1}{3}\iint\limits_{D'} x^3y^3\, dudv = \frac{1}{3}\iint\limits_{D'} x^2y.xy^2\, dudv = \frac{1}{3}\iint\limits_{D'} uv\, dudv \\ &= \left(\int_1^2 u\, du\right)\left(\int_1^2 v\, dv\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

پاسخ مسألهٔ ٦) از صورت مسأله چنین بر می‌آید که ناحیهٔ مورد نظر عبارت است از $\Omega : 0 \le z \le \pi\,,\, x^2+y^2 \le \sin z$. به کمک مختصات استوانه‌ای می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \Omega' &: \quad 0 \le z \le \pi\,,\, r^2 \le \sin z \\ &: \quad 0 \le \theta \le 2\pi\,,\, 0 \le z \le \pi\,,\, 0 \le r \le \sqrt{\sin z} \end{aligned}$$

به قسمت (ب) از شکل ۴۰.۲ توجه شود. در نتیجه، گشتاور Ω حول z–محور برابر است با

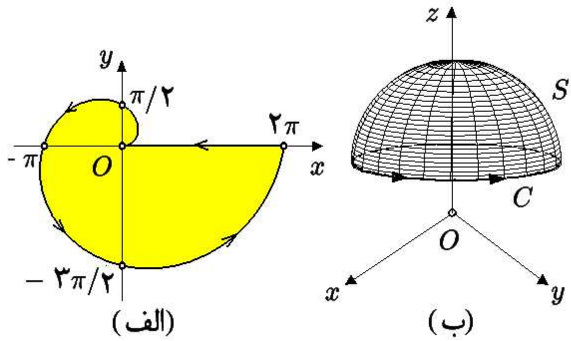
$$\begin{aligned} I_z &= \iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)\delta\, dV = \iiint\limits_\Omega z(x^2+y^2)\, dV \\ &= \iiint\limits_{\Omega'} r^2.z.r\, dV' = \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^\pi \left[\int_0^{\sqrt{\sin z}} r^3 z\, dr\right] dz\right) \\ &= 2\pi\int_0^\pi \left[\frac{r^4}{4}z\right]_0^{\sqrt{\sin z}} = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi z\sin^2 z\, dz \\ &= \frac{\pi}{8}\Big[z^2+1-z\sin 2z-\cos^2 z\Big]_0^\pi = \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

پاسخ مسألهٔ ۷) منحنی قطبی مورد نظر را به روش نقطه یابی ترسیم می‌کنیم:

θ	0	$\pi/2$	π	π	$3\pi/2$	2π
r	0	$\pi/2$	π	π	$3\pi/2$	2π

به شکل ۴۱.۲—الف توجه شود. چون این منحنی یک منحنی ژردان است و جهت آن نیز استاندارد انتخاب شده است و میدان برداری $\mathbf{F}$ بر درون C دیفرانسیلپذیر است:

$$D : 0 \le \theta \le 2\pi\,,\, 0 \le r \le \theta$$



شکل ۴۱.۲: (الف) مسألهٔ ۷ از امتحان بیست و یکم (ب) مسألهٔ ۸ از امتحان بیست و یکم

بنابراین، از قضیهٔ گرین برای محاسبهٔ این انتگرال می‌توان استفاده نمود. در نتیجه، داریم

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} &= \oint_C -y^۳\,dx + x^۳\,dy = \iint_D \Big((x^۳)_x - (-y^۳)_y \Big)\,dxdy \\ &= ۳\iint_D (x^۲ + y^۲)\,dxdy = ۳\iint_{D'} r^۲.r\,drd\theta \\ &= ۳\int_۰^{۲\pi}\left[\int_۰^{\theta} r^۳\,dr\right] d\theta = \frac{۳}{۴}\int_۰^{۲\pi} \theta^۴\,d\theta = ۱۲\pi^۴ \end{aligned}$$

پاسخ مسألهٔ ۸) ابتدا سطح مورد نظر را شناسایی می‌کنیم:

$$S\ :\ z = ۱ + \sqrt{۱ - x^۲ - y^۲}\ ;\ (x,y)\in D \qquad D\ :\ x^۲ + y^۲ \le ۱\,,\ ۰ \le x$$

به شکل ۴۱.۲–(ب) توجه شود. به این ترتیب، تابع معرف S عبارت است از $f = x^۲ + y^۲ + z^۲ - ۲z$ و لذا

$$\begin{aligned} \mathbf{n}\,d\sigma &= \pm\frac{f'}{|f_z|}\,dxdy = \pm\frac{\overrightarrow{(۲x, ۲y, ۲z - ۲)}}{|۲z - ۲|}\,dxdy \\ &= \pm\overrightarrow{(x, y, \sqrt{۱ - x^۲ - y^۲})}\,\frac{dxdy}{\sqrt{۱ - x^۲ - y^۲}} \end{aligned}$$

که با توجه به صورت مسأله، حالت + مورد قبول است. از طرفی

$$\begin{aligned}
\mathrm{Curl}(\mathrm{Curl}(\mathbf{F})) &= \mathrm{Curl}\left(\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ z^{۳} & y^{۳} & x^{۳} \end{vmatrix}\right) \\
&= \mathrm{Curl}\left(\overrightarrow{(۰, ۳z^{۲} - ۳x^{۲}, ۰)}\right) \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ ۰ & ۳z^{۲} - ۳x^{۲} & ۰ \end{vmatrix} = \overrightarrow{(-۶z, ۰, -۶x)}
\end{aligned}$$

پس، در مجموع داریم

$$\oint_C \mathrm{Curl}\,(\mathbf{F}) \bullet d\mathbf{r} = \iint_{(S)} \mathrm{Curl}\left(\mathrm{Curl}\,(\mathbf{F})\right) \bullet \mathbf{n}\, d\sigma$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_{(S)} \overrightarrow{(-۶ - ۶\sqrt{۱ - x^{۲} - y^{۲}}, ۰, -۶x)} \bullet \\
&\qquad\qquad \overrightarrow{(x, y, \sqrt{۱ - x^{۲} - y^{۲}})} \frac{dxdy}{\sqrt{۱ - x^{۲} - y^{۲}}} \\
&= -۶ \iint_D \frac{x + ۲x\sqrt{۱ - x^{۲} - y^{۲}}}{\sqrt{۱ - x^{۲} - y^{۲}}}\, dxdy \\
&\overset{(۱)}{=} \iint_D r\cos\theta \frac{۱ + \sqrt{۱ - r^{۲}}}{\sqrt{۱ - r^{۲}}} .r\, drd\theta \\
&= \left(\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲} \cos\theta\, d\theta\right) \left(\int_۰^۱ r^{۲} \frac{۱ + \sqrt{۱ - r^{۲}}}{\sqrt{۱ - r^{۲}}}\, dr\right) \\
&\overset{(۲)}{=} ۲\int_۰^{\pi/۲} \sin^{۲} t \frac{۱ + \cos t}{\cos t} \cos t\, dt \\
&= \left[t - \frac{۱}{۲}\sin ۲t + \frac{۲}{۳}\sin^{۳} t\right]_۰^{\pi/۲} = \frac{\pi}{۲} + \frac{۴}{۳}
\end{aligned}$$

توضیح اینکه در (۱) از تغییر متغیر قطبی استفاده نموده‌ایم و D' تصویر D در صفحهٔ $rO\theta$ عبارت است از $D' \;:\; -\pi/۲ \leq \theta \leq \pi/۲\,,\; ۰ \leq r \leq ۱$. در (۲) نیز از تغییر متغیر $t = \sin\theta$ استفاده نموده‌ایم.

فرمولهای لازم

مثلثات

$$\sin^{۲} x + \cos^{۲} x = ۱,$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

$$\sec x = \frac{۱}{\cos x}, \qquad \csc x = \frac{۱}{\sin x},$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y,$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y,$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{۱ \mp \tan x \tan y}, \qquad \cot(x \pm y) = \frac{\cot x \cot y \mp ۱}{\cot y \pm \cot x},$$

$$\cos ۲x = \cos^{۲} x - \sin^{۲} x = ۱ - ۲\sin^{۲} x = ۲\cos^{۲} x - ۱,$$

$$\sin ۲x = ۲\sin x \cos x, \qquad \tan ۲x = \frac{۲\tan x}{۱ - \tan^{۲} x},$$

$$\sin^{۲} x = \frac{۱ - \cos ۲x}{۲}, \qquad \cos^{۲} x = \frac{۱ + \cos ۲x}{۲},$$

مشتق

$$c' = ۰, \qquad (cu)' = cu',$$

$$(u+v)' = u' + v', \qquad (uv)' = u'v + v'u,$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^{۲}}, \qquad (n^{n})' = nu'n^{n-۱},$$

$$(\sin u)' = u' \cos u, \qquad (\cos u)' = -u' \sin u,$$

$$(\tan u)' = u'\left(۱ + \tan^{۲} u\right), \qquad (\ln u)' = \frac{u'}{u},$$

$$(a^{u})' = (\ln a)\, u' a^{u}, \qquad (e^{u})' = u' e^{u},$$

$$\left(\sin^{-۱} u\right)' = \frac{u'}{\sqrt{۱ - u^{۲}}} = -\left(\cos^{-۱} u\right)',$$

$$\left(\tan^{-1} u\right)' = \frac{u'}{1+u^2} = -\left(\cot^{-1} u\right)',$$

انتگرال

$$\int af(x)\;dx = a\int f(x)\;dx + C \;\; (\text{عددی ثابت است } a),$$

$$\int (u \pm v)\;dx = \int u\,dx \pm \int v\,dx + C,$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du + C, \qquad \int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C,\;\; (n \neq -1)$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C, \qquad \int e^u\,du = e^u + C,$$

$$\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C, \qquad \int \sin u\,du = -\cos u + C,$$

$$\int \cos u\,du = \sin u + C, \qquad \int \tan u\,du = \ln \sec u + C,$$

$$\int \cot u\,du = \ln \sin u + C, \qquad \int \frac{du}{\cos u} = \ln|\sec u + \tan u| + C,$$

$$\int \frac{du}{\sin u} = \ln|\csc u - \cot u| + C, \qquad \int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a} + C,$$

$$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C, \qquad \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C,$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \mp a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \mp a^2}\right| + C,$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 \mp a^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{u + \sqrt{u^2 \mp a^2}}{u}\right| + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2\sqrt{ax+b}}{a} + C, \qquad \int \sqrt{ax+b} = \frac{2\sqrt{(ax+b)^3}}{3a} + C.$$

فهرست الفبایی